3. Las Interacciones Fundamentales

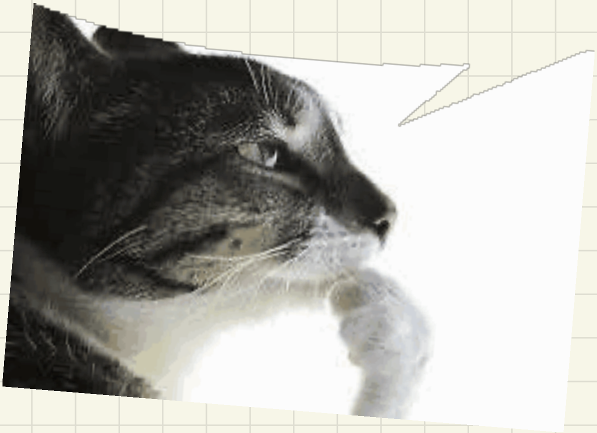
3.1. Gravitación

Newton:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{3.1}$$

Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$



3.2. Electromagnetismo

Sabemos que las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \qquad (3.3)$$

- Describen a la luz por medio del campo eléctrico y magnético. Estos pueden escribirse por medio de ϕ y $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ,$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} . \qquad (3.4)$$

Nota que estas definiciones nos ofrece la libertad de redefinir los campos sin cambiar $\vec{E}$ o $\vec{B}$:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \chi \qquad (3.5)$$

Una característica importante es que tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ no son invariantes de Lorentz. Lo que sí es un invariante es:

$$A^\mu = (1/c\,\phi, \vec{A}) \tag{3.6}$$

Esto es, el cuadripotencial transforma como cuadrivector bajo Lorentz.

De igual forma, tenemos la siguente libertad para redefinir A^μ:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{3.7}$$

Ahora, podemos construir una cantidad que es gauge-invariant y también inv. de Lorentz:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \tag{3.8}$$

Este es el tensor de Faraday. Es gauge invariant porque:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \chi) \end{aligned}$$

$$= \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \chi$$
$$- \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \chi$$
$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$= F_{\mu\nu} \quad \checkmark$$

Otras cantidades interesantes que son escalares de Lorentz son:

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \qquad (3.9)$$

y

$$\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = - \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}. \qquad (3.10)$$

TAREA

Con todo esto podemos describir la dinámica del fotón.

- Recordemos que esto no incluye la interacción con los fermiones. Para esto, es necesario hablar de Dirac.
- Antes de esto, la ecuación de Schrödinger describe al electrón "lento", pero tiene problemas:
  - No invariante de Lorentz

- Causalidad
- Spin
- No es lineal

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right]\psi}$$

· La idea de Dirac fue encontrar una ecuación que sea lineal en las deriv. partiendo de

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (3.11)$$

Esto no es un ejercicio trivial ya que se requiere de cantidades como espinores y matrices gamma. El resultado es:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0 \qquad (3.12)$$

con γ^μ matrices gamma y ψ un espinor.

Más de esto en QFT o cuántica 2.

Esta ecuación describe al electrón (o fermión) libre.

¿Cómo interactúa con el fotón?

→ Acoplamiento mínimo.

Tomamos la derivada parcial y hacemos

$$\partial_\mu \longmapsto D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \qquad (3.13)$$

usualmente e

El Lagrangiano de interacción es entonces

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (3.14)$$

$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$

Ahora, ¿De dónde salen las partículas?

→ Hay que cuantizar $\psi(x)$ y $A_\mu(x)$.

El espectro de la teoría serán partículas, antipartículas fermiónicas y fotones.

· Esto es la electrodinámica cuántica (QED).

Finalmente, es posible obtener las e.o.m de este Lagrangiano utilizando E-L.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

con $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda s}F_{\lambda s}$. Las primeras dos variando A_μ y la tercera $\bar{\psi}$.