8.2.1. Simetrías de Campo

- Supón que tenemos un campo $\psi(x)$.
  - El observador S' verá $\psi'(x')$, mientras que S verá $\psi(x)$.

Este es el mismo campo, visto desde diferentes perspectivas.

¿Cómo están relacionados?

⇝ Transf. de Lorentz.

Tenemos dos tipos :

$x \longrightarrow x'$: Diferentes puntos del spacetime o rotaciones.

$\psi \longrightarrow \psi'$: Mix de componentes.

Por ejemplo, $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$

$\Rightarrow A'_\mu = (A'_0, A'_1, A'_2, A'_3) = (A_0, -A_2, A_1, A_3)$.

A_μ y A_μ' describen el mismo campo en diferentes sistemas.

- Para que haya conservación, ambas transf. deben de conservarse.

- Para estudiar esto, consideremos densidades Lagrangianas.

Entonces, simetría significa:

$$\mathcal{L}\left(\phi(x_\mu), \partial_\mu \phi(x_\mu), x_\mu\right) = \mathcal{L}\left(\phi'(x_\mu'), \partial_\mu \phi'(x_\mu'), x_\mu'\right)$$

- Recordando que:

$$df\left(g(x), h(x), \dots\right) = \frac{\partial f}{\partial g}\delta g + \frac{\partial f}{\partial h}\delta h + \dots + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x$$

Para la densidad Lagrangiana tendremos:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu$$

· Con ayuda de las ec. de Euler-Lagrange

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu$$

Recordando del caso unidimensional:

$$\phi(x) \to \phi(x+\epsilon) = \phi(x) + \partial_x \phi(x) \epsilon$$

Se puede mostrar que en nuestro caso tenemos:

$$\delta\phi = \epsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \phi(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \qquad (8.8)$$

Generadores de rotaciones

· Consideremos por ahora el caso de traslaciones.

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu$$

Dado que las componentes no se "mezclan" en una traslación, tenemos:

$$\delta\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \qquad (8.9)$$

· Investigando la invariancia de $\mathcal{L}$, $\delta\mathcal{L}=0$,

$$-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\delta x_\mu\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu = 0$$

$$-\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L}\right)\delta x_\mu = 0 \qquad (8.10)$$

con $\delta x_\mu = a_\mu$. Con esto definimos el tensor de energía momento

$$\boxed{T^\nu_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L}} \qquad (8.11)$$

Este tensor cumple con

$$\boxed{\partial_\nu T^\nu{}_\mu = 0} \, . \qquad (8.12)$$

Esto significa,

$$\partial_\nu T^\nu{}_\mu = \partial_0 T^0{}_\mu + \partial_i T^i{}_\mu \, .$$

<u>¿Qué podemos hacer con esto?</u>

Tomemos $\mu = 0$.

$$\Rightarrow \partial_\nu T^\nu{}_0 = \partial_0 T^0{}_0 + \partial_i T^i{}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_0 T^0{}_0 = -\underbrace{\partial_i T^i{}_0}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{T}}$$

Integramos sobre un volumen

$$\int_V d^3x \, \partial_0 T^0{}_0 = -\int_V d^3x \, \vec{\nabla}\cdot\vec{T}$$

Teorema de la div.

$$= -\int_S d^2x\, \vec{T}$$

Campos se desvanecen en el infinito.

$$= 0$$

Finalmente tenemos:

$$\partial_t \Big(\underbrace{\int_V d^3x\, T^0{}_0}_{\text{se conserva}} \Big) = 0 \;;$$

· Podemos hacer el mismo analisis para $\mu = i$, $i = 1,2,3$ y obtendremos

$$E = \int_V d^3x\, T^0{}_0 \tag{8.13}$$

$$P_i = \int_V d^3x\, T^0{}_i \tag{8.14}$$

que son cuatro cantidades conservadas.

- E es energía total del sistema, surge de la invariancia temporal

$$X_0 \longrightarrow X_0 + a_0$$

- P_i es el momento total del sistema, surge de invariancia espacial

$$X_i \rightarrow X_i + a_i$$

- Siguiendo con transformaciones del tipo (8.9), i.e., sin mezclar componentes, consideremos:

Rotaciones y Boosts

Espacio Espaciotiempo

- La transformación será

$$x_\mu \rightarrow x_\mu' = x_\mu + \delta x_\mu$$
$$= x_\mu + M_\mu^{\ \sigma} x_\sigma$$

donde $M_\mu^{\ \sigma}$ es el generador de rotaciones y boosts.

- Ponemos esto en (8.10):

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}-\delta^\nu_\mu\mathcal{L}\right)M^{\mu\sigma}x_\sigma=0$$

$$\Rightarrow\quad \partial_\nu T_\mu^{\ \nu}M^{\mu\sigma}x_\sigma=0$$

Reescribamos esto:

$$\frac{1}{2}\left(\partial^\nu T_\nu^{\ \mu}M_{\mu\sigma}x^\sigma+\partial^\nu T_\nu^{\ \mu}\underline{M_{\mu\sigma}}x^\sigma\right)$$

Antisim.

$$=\frac{1}{2}\left(\partial^\nu T_\nu^{\ \mu}M_{\mu\sigma}x^\sigma-\partial^\nu T_\nu^{\ \mu}M_{\sigma\mu}x^\sigma\right)$$

Renomb. índices

$$=\frac{1}{2}\left(\partial^\nu T_\nu^{\ \mu}M_{\mu\sigma}x^\sigma-\partial^\nu T_\nu^{\ \sigma}M_{\mu\sigma}x^\mu\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\partial^\nu T_\nu^{\ \mu}x^\sigma-\partial^\nu T_\nu^{\ \sigma}x^\mu\right)M_{\mu\sigma}=0$$

Definiendo

$$(J^\nu)^{\sigma\mu}\equiv T^{\mu\nu}x^\sigma-T^{\sigma\nu}x^\mu \qquad (8.15)$$

con $$\partial_\nu (J^\nu)^{\sigma\mu} = 0 . \qquad (8.16)$$

· Aquí, J^ν es la corriente de Noether.

· Notemos que, con $\nu = 0$ (parte temporal) y usando los mismos trucos de arriba

$$(J^0)^{\mu\sigma} \equiv Q^{\mu\sigma} = \int d^3x \left(T^{\mu 0} x^\sigma - T^{\sigma 0} x^\mu \right)$$

es una cantidad conservada.

· Para rotaciones:

$$L^i_{orbit} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} Q^{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int d^3x \left(T^{j0} x^k - T^{k0} x^j \right)$$

esto es el momento angular orbital del campo.

· Para boosts:

$$Q^{0i} = \int d^3x \left(T^{00} x^i - T^{i0} x^0 \right)$$

Center of energy conserved ?

- Hasta ahora solo hemos considerado (8.8) sin el primer término

¿Qué sucede si lo agregamos?

$$\Rightarrow L^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}Q^{jk} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} S^{ij}\phi \right.$$

$$\left. + \left(T^{j0}x^i - T^{k0}x^j\right)\right)$$

$$= L^i_{spin} + L^i_{orbit}$$

- Este nuevo término está relacionado a cierto momento angular interno.

- Para finalizar,

¿Qué pasa con las transf. de campo?

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i' = \phi_i + \delta\phi_i$$

Podemos aplicar el mismo método e investigar la <u>invariancia de $\delta\mathcal{L}$.</u>

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i) - \mathcal{L}(\phi^i + \delta\phi^i, \partial_\mu(\phi^i + \delta\phi^i))$$

$$= -\frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i)}{\partial\phi^i}\delta\phi^i - \frac{\partial\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i)}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\partial_\mu\delta\phi^i$$

$$= -\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\right)\delta\phi^i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\partial_\mu\delta\phi^i$$

Invariancia

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\phi^i\right) = 0$$

Si $\mathcal{L}$ es invariante ante $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$, obtenemos que

$$J^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\phi^i \qquad (8.17)$$

es una cantidad conservada.

- Como siempre, podemos mostrar que

$$\partial_t \int d^3x \, J^0 = 0.$$

Definiendo:

$$\Pi = \int d^3x \, \pi$$

con $J^0 = \pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$, donde π la densidad de momento conjugada.

- Con esto tenemos

$$\partial_t \Pi = 0 \tag{8.15}$$

- No confundir con la densidad de momento física que sale de

$$\phi(x) \to \phi(x') = \phi(x+\epsilon)$$

$$\rightsquigarrow \quad P^i = T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- Más formalmente, (8.18) es consecuencia de transf. de campo como la sig.:

- Si consideramos un pequeño desplazamiento del campo:

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - i\varepsilon ,$$

el generador de esta transf. es $-i\frac{\partial}{\partial \phi}$

$$\begin{aligned} \phi' &= \exp\left(-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\phi \\ &= \left(1 - \epsilon \frac{\partial}{\partial \phi} + \cdots\right)\phi \\ &\approx \phi - i\varepsilon . \end{aligned}$$