

8. SIMETRÍAS.

8.1. Teorema de Noether.

- Cada simetría del lagrangiano está relacionado a una cantidad conservada.
- Investiguemos el lagrangiano ante una transf. infinitesimal.

$$q \rightarrow q' = q + \delta q. \text{ Matemáticamente: } \delta L = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) - L\left(q + \delta q, \frac{dq}{dt} + \frac{d\delta q}{dt}, t\right) \quad (8.1)$$

+ si buscamos una invariancia del lagrangiano. $\delta L = 0$. (8.2)

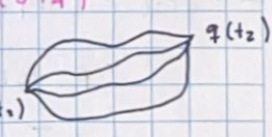
- Pero demandar $\delta L = 0$ es una condición "muy fuerte". Investiguemos la acción:

$$\delta S = \int dt \delta L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) = 0, \text{ si } \delta L = 0. \quad (8.3)$$

— ¿Cómo puede cambiar el lagrangiano, manteniendo la acción invariante?

- Resulta que podemos agregar una derivada total del lagrangiano sin cambiar la acción.

$$L \rightarrow L + \frac{dG}{dt}; \quad G = G(q). \quad (8.4)$$

$$\Rightarrow \delta S \rightarrow \delta S' = \delta S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \delta G \right) = \delta S + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial q} \delta q}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (8.5)$$


► **CONCLUSIÓN:** no necesitamos que la variación del lagrangiano sea $\delta L = 0$, sino que tenga la forma:

$$\delta L = \frac{dG}{dt}. \quad (8.6)$$

- Reescribiendo (8.2):

$$\delta L = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) - L\left(q + \delta q, \frac{dq}{dt} + \frac{d\delta q}{dt}, t\right) = - \frac{dG}{dt}$$

- Expandimos en Taylor, dado que δq es pequeña:

$$\delta L = L - L - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = - \frac{dG}{dt} \Rightarrow - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = - \frac{dG}{dt}; \quad \frac{dL}{dt} = 0$$

$$\text{Usando E-L: } - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q = - \frac{dG}{dt} \Rightarrow - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = - \frac{dG}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + G \right) = 0. \text{ Definiendo } J \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + G \quad (1.7)$$

$$\cdot \frac{dJ}{dt} = 0 \Rightarrow J \text{ cte.}$$

$$L \rightarrow L + dG/dt$$

$$\delta S = 0$$

∴ Ejemplo: partícula libre.

• Tenemos $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2$. Si tomo $\vec{q} \rightarrow \vec{q} + \vec{a}$, $\vec{a}$ cte.

$$L' = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{q}} + \dot{\vec{q}}')^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2 = L \rightarrow \text{inv. ante traslaciones.}$$

• Calculando la cantidad conservada debido a esta invariancia:

$$J_{\text{tras}} = (m\dot{\vec{q}}) \cdot \vec{a}; \text{ ¿por qué } G=0? \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{a}) = 0: \vec{p} \text{ es una cantidad conservada.}$$

• Consideremos una rotación infinitesimal: $q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon_{ijk} q_j a_k$

• Tomemos de nuevo $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2$

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_1 + \epsilon_{1jk} q_j a_k \\ &= q_1 + (q_2 a_3 - q_3 a_2) \\ q'_2 &= ? \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{\text{rot}} = (m\dot{q}_i) \epsilon_{ijk} q_j a_k$$

$$= p_i \epsilon_{ijk} q_j a_k = (\epsilon_{ijk} p_i q_j) a_k$$

$$= (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{a} = -\vec{L} \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (J_{\text{rot}}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{a}) = 0; \text{ inv. ante rotación } \Rightarrow \text{mom. \& conserved.}$$

• De ayer: rotación infinitesimal.

• Una rotación inf. en z:

$$R(\delta\theta, \hat{e}_z) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Si rotamos sobre un vector: $q' = R(\delta\theta, \hat{e}_z) q$

$$\Rightarrow q' = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_x - \delta\theta q_y \\ \delta\theta q_x + q_y \\ q_z \end{pmatrix}. \quad \text{El cambio infinitesimal lo definimos:}$$

$$q' = q + \delta q$$

$$\Rightarrow \delta q = q' - q = \begin{pmatrix} q_x - \delta\theta q_y \\ \delta\theta q_x + q_y \\ q_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta\theta q_y \\ \delta\theta q_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $q'_i = q_i + \epsilon_{ijk} q_j a_k$. ¿Por qué $G=0$?

$$\delta L = dG/dt$$

• Si el lagrangiano es explícitamente invariante ante una transf., podemos tomar $G=0$.

♦ EJEMPLO: $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$. Si tomamos $q \rightarrow q + a$, L es invariante.

• la función G captura la parte del lagrangiano que cambia con una derivada total.

$$S = -\frac{i}{4} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}; \quad L \rightarrow L' = L + dG/dt$$

► INVARIANCIA TEMPORAL, $t \rightarrow t' = t + \epsilon$. Tendremos entonces:

$$\delta L = L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) - L\left(q(t+\epsilon), \frac{dq(t+\epsilon)}{dt}, t+\epsilon\right)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \epsilon - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \epsilon - \frac{\partial L}{\partial t} \epsilon = -\frac{dL}{dt} \epsilon$$

• En gral: $\delta L \neq 0$, y la condición (8.6): $\delta L = -dL/dt$.

• la cantidad conservada: $J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + G = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - L$.

$$\Rightarrow J = p \delta q - L = H \quad (\text{el hamiltoniano}).$$

• El Hamiltoniano se conserva: $\frac{dH}{dt} = 0$.

• En conclusión:

invariancia...	conservación de...
• ante traslaciones	→ momento lineal
• ante rotaciones	→ momento angular
• temporal	→ energía

8.2. TEOREMA DE NOETHER PARA CAMPOS

♦ ¿Por qué campos? Porque podemos describir la naturaleza con estos objetos.

• Ejemplos: $\vec{E}, \vec{B}$, campo Klein-Gordon.

• En teoría de campos, la idea es reemplazar $q_i(t) \rightarrow \varphi(\vec{x}, t)$.

• Pasamos de deriv. temporal a deriv. parcial:

$$\frac{d}{dt} q_i(t) \rightarrow \partial_\mu \varphi(\vec{x}, t), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \dots = \partial_\mu \varphi(x^\mu)$$

• El lagrangiano pasa a ser una densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad \text{la acción: } S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

• Las e.o.m. son ahora: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$.