

7.1. Ecuación general de Hamilton

Supón que tenemos una función que depende de $q(t)$ y $p(t)$, describiendo un objeto en una dimensión:

$$F = F(q(t), p(t))$$

la tasa de cambio sobre la trayectoria de la partícula es:

$$\frac{d}{dt} F(q, p) = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dt} \quad (7.9)$$

con ayuda de (7.8) podemos reescribir (7.9)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \left[\frac{\partial H}{\partial p} \right] - \frac{\partial F}{\partial p} \left[\frac{\partial H}{\partial q} \right] \quad (7.10)$$

• Esto es, la evolución en el espacio fase de $F(q, p)$ está determinada por el Hamiltoniano.

Ahora vamos a escribir de forma más compacta.

Introducimos los Poisson brackets $\{, \}$,
definidos como:

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}$$

con $A = A(q, p)$ y $B = B(q, p)$.

Nota: El bracket de Poisson no es un "producto"
sino una derivada de Lie. (Avanzado)

Con esto, reescribimos (7.10):

$$\frac{d}{dt} F = \{F, H\} \quad (7.11)$$

Esta ecuación describe la evolución temporal
de una función en el espacio fase.

Considera $F = q$:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \{q, H\} \\ &= \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Ahora toma $F = p$:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \{p, H\} \\ &= \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

Recuperamos las ecuaciones de Hamilton.

¿Cómo interpreto 7.11?

Haciendo un poco de álgebra:

$$\frac{d}{dt} F = \{F, H\}$$

$$\rightarrow dF = \{F, H\} dt$$

$$\Delta F = \{F, H\} \Delta t$$

- Cuánto cambia F en un Δt .
- $\{F, H\}$ da la tasa de cambio.
- En conclusión,
El Hamiltoniano genera evolución temporal en el espacio fase.

¿Dónde aplico esto?

→ Mecánica Cuántica.

- La evolución temporal de los observables está dada por:

$$\frac{d}{dt} \hat{F} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{F}, \hat{H}]$$

donde $[\hat{F}, \hat{H}] = \hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}$ es el conmutador.

- Esta es la ecuación de Heisenberg.

En pocas palabras, hicimos:

$$\{A, B\} \longrightarrow -\frac{i}{\hbar} [A, B]$$

Esta es la cuantización canónica.

Ejemplo . . .

¿Cómo interpreto (7.11)?

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \rightarrow dF = \{F, H\} dt$$

$$\Delta F = \{F, H\} \Delta t$$

$\rightarrow \{F, H\}$ da la tasa de cambio.

¿Dónde aplico esto?

• Mecánica cuántica

La evaluación temporal de los observables:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{F}, \hat{H}]$$

Libro: Schwichtenberg

donde $[\hat{F}, \hat{H}] = \hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}$ es el conmutador. Esta es la ecuación de Heisenberg.

En pocas palabras, hicimos

$$\{A, B\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]$$

Esta es la cuantización canónica.

Oscilador armónico:

* Lagrange:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2$$

$$\text{Euler-Lagrange: } \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

$$-Kx - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = -Kx}$$

* Hamilton:

$$H = p\dot{x} - L$$

$$\text{tenemos: } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2 \right) \quad (\text{momento generalizada})$$

$$\Rightarrow p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

Tarea: ^{pla}partícula cargada
y ahí no es $p = m\dot{x}$.

El Hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} K x^2$$

$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2} \rightarrow$ En este caso el Hamiltoniano sí es la energía total (cinética + potencial).

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

$= -kx$ Recuperamos la fuerza

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

$$= \frac{p}{m}$$

Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt} \rightarrow \text{esto es lo que tenemos que hacer a diferencia de Lagrange.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} (-kx)$$

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

Recuperamos la misma ecuación de movimiento que con Lagrange $m\ddot{x} = -kx$.

ejemplo: Péndulo

Calcular las e.o.m.
El Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos(\phi)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{p}{m l^2}}$$

El Hamiltoniano:

$$H = p\dot{\phi} - L$$

$$= \frac{p^2}{m l^2} - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi$$

$$= \frac{p^2}{m l^2} - \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{p^2}{m^2 l^4} \right) - mgl \cos \phi$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m l^2} - mgl \cos \phi}$$

Mayo
06
2024

Mayo
09
2024

Las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \phi}$$

$$= -mg l \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$= \frac{p}{ml^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{ml^2} \frac{dp}{dt}$$

$$= \frac{1}{ml^2} (-mg l \sin \phi)$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \phi}$$

ejemplo: El Lagrangiano para un sistema es

$$L = a \dot{x}^2 + b \frac{\dot{y}}{x} + c x \dot{y} + f y^2 \dot{x} \dot{z} + g \dot{y} - k \sqrt{x^2 + y^2}$$

¿Cuál es el Hamiltoniano?

¿Qué cantidades se conservan?