

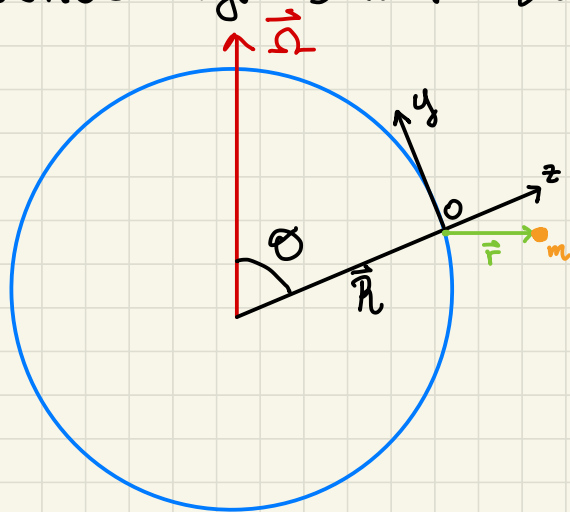
6.4. Caída Libre y Coriolis

Consideremos el efecto de F_{cor} sobre una partícula cayendo en el vacío.

De (6.13) tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}_0 + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{\text{cor}} \quad (6.14)$$

donde $m\vec{g}_0$ es la fuerza debido a la Tierra.



Recordando que $F_{cf} = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}$,

$\vec{r} \rightarrow \vec{R}$ es buena aproximación.

Con esto tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{m\vec{g}_0 + m(\vec{\Omega} \times \vec{R}) \times \vec{\Omega}}_{m\vec{g}} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$$

TAREA

Esto nos lleva a :

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} + 2\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad (6.15)$$

Lo interesante de (6.15) es que no depende de $\vec{r}$; hagamos cambio de origen.

→ Origen en la superficie de la Tierra, $\vec{R}$.

Tenemos,

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\vec{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta).$$

Ahora calculamos:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = (\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta, -\dot{x}\Omega \cos \theta, \dot{x}\Omega \sin \theta)$$

y (6.15) se reescribe como :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega(\dot{y}\cos\theta - \dot{z}\sin\theta) \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x}\cos\theta \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega\dot{x}\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Resolvamos estas ecuaciones bajo distintas consideraciones:

*Caso $\Omega \approx 0$:

Tendremos:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g \quad (6.17)$$

Estas son las ecuaciones de caída libre de siempre.

Si la partícula se suelta desde h :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6.18)$$

$\Rightarrow$ aproximación de orden cero.

$\leadsto$ No vemos efectos de Coriolis.

*Caso $\Omega \ll 1$ más orden cero:

Sustituimos (6.18) en (6.16):

$$\ddot{x} = 2\Omega g t \sin\theta, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g \quad (6.19)$$

Integrando:

$$\leadsto x = \frac{1}{3} \Omega g t^3 \sin \theta \quad (6.20)$$

$\Rightarrow$ aproximación de primer orden

Los demás órdenes se obtienen de la misma manera.

• ¿Qué significa este resultado?

La partícula no cae derecho, comienza a moverse al este.

• Ejemplo, una moneda se deja caer en un pozo de 100m.

¿Cuánto se va a desviar?

• Tenemos que el tiempo de caída es $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

$$\leadsto x = \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{3} (7.3 \times 10^{-5} / s) (9.81 m/s^2) (20.38 s^2)^{3/2}$$

$$\approx 0.0219 m \rightarrow 2.2 cm$$

7. Mecánica Hamiltoniana

· Recordemos :

- Newton $\rightarrow$ Espacio físico

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Lagrange $\rightarrow$ Espacio de configuraciones

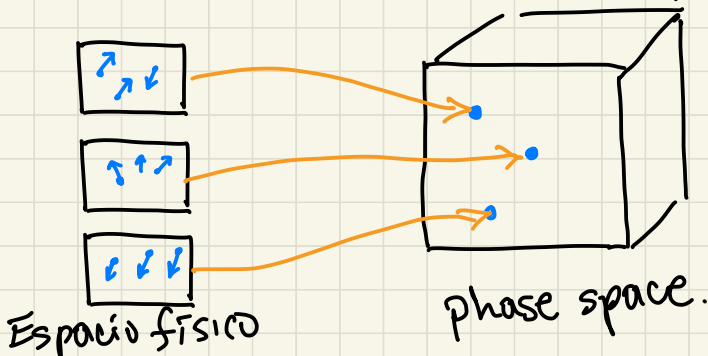
$$S = \int L(q, \dot{q}) dt$$

$\vec{q}(t)$: describe camino en el config. space.

· Resulta que hay otra forma de obtener la dinámica de un sistema.

· Por ejemplo, podríamos considerar ahora también el momento.

$\leadsto$ Necesitamos un nuevo espacio:



- Entonces, en mecánica Hamiltoniana:

dinámica $\longrightarrow$ camino en el espacio fase.

- Ahora, tenemos que estudiar q_i y p_i en conjunto.

• Consideremos que ambas son independientes.

• Recordando que

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (7.1)$$

y que :

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad (7.2)$$

- Nuestro objetivo será reescribir (7.1) y (7.2) sin $\dot{q}$.

• Warning: Simplemente reemplazar p en el Lagrangiano

resolverá el problema.

Esto es:

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial t} \neq \frac{\partial \tilde{L}(q, p)}{\partial t}$$

con

$$\tilde{L}(q, p) \equiv L(q, \dot{q}(q, p)). \quad (7.3)$$

¿Qué significa esto?

Por ejemplo, toma el Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = m \frac{\dot{q}^2}{2}$$

con (7.3) tienes

$$\tilde{L}(q, p) = \frac{m}{2} (\dot{q}(q, p))^2$$

$$= \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2$$

$$= \frac{p^2}{2m}$$

$$\begin{aligned} p &= m\dot{q} \\ \dot{q} &= \frac{p}{m} \end{aligned}$$

• Si hubiéramos reemplazado directo :

$$L(q, p) = m \frac{p^2}{2} \neq \frac{p^2}{2m} = \tilde{L}(q, p) \quad (7.4)$$

(reemplazar $\dot{q} \rightarrow p$) $\uparrow$

• Veamos qué pasa si tomamos la derivada de (7.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}(q, p)}{\partial q} &= \frac{\partial L(q, \dot{q}(p, q))}{\partial q} \\ &= \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial q} \\ &= \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \frac{\partial \tilde{L}(q, p)}{\partial q} - p \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial q}$$

Recordando que:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\tilde{L}(q, p) - p\dot{q})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}} \quad (7.6)$$

Definiendo

$$H \equiv p\dot{q} - \tilde{L}(q, p) \quad (7.5)$$

La ec. (7.5) determina la evolución temporal de p .

La función H es el Hamiltoniano.

De igual forma, podemos calcular la derivada de (7.4) respecto a p :

$$\frac{\partial \tilde{L}(q, p)}{\partial p} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p}$$

$$= p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(p\dot{q}) = p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} + \dot{q}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}(p\dot{q}) - \dot{q}$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial p} (\tilde{L}(q, p) - p\dot{q}) = -\dot{q}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

De esta forma, eliminamos $\dot{q}$ de (7.2) :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}} \quad (7.7)$$

El conjunto (7.6) y (7.7) componen las ecuaciones de Hamilton.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}} \quad (7.8)$$

¡ No olvidar !

¿Qué describe el Hamiltoniano?

Consideremos

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

Calculemos : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$.

Ahora H :

$$\begin{aligned} H &= p \dot{q} - L \\ &= p \dot{q} - \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \\ &= p \left(\frac{p}{m} \right) - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 + V(q) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(q) = T + V \end{aligned}$$

Esta es la energía total de la partícula

Ahora calculemos (7.8):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q} = - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q} \end{aligned}$$

Esta es la Segunda Ley de Newton
De la segunda ecuación:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Nos dice el momento del sistema.

• Ejemplo, partícula en campo central.

Recordando, tenemos:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$$

Se tiene que:

$$H = T + V$$

y:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}$$

Esto es,

$$\dot{r} = \frac{P_r}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mr^2}$$

Sustituimos en el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\phi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

Aquí $q_i = r, \phi$.

Tendremos entonces:

Para r:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}, \\ \frac{dP_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\phi^2}{mr^3} - \frac{dV(r)}{dr} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Sustituyo la} \\ \text{primera en la} \\ \text{segunda y} \\ \text{ve qué pasa.} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{mr^2}, \\ \frac{dP_\phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Conservación} \\ \text{de momento} \\ \text{angular.} \end{array}$$