5. Oscilaciones

5.1. Motivación

- La mayoría de los sistemas tienden al equilibrio. Al perturbarlos, su evolución realiza pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio.

¿Por qué estudiar esto?

⇝ La mayoría de los fenómenos naturales pueden ser descritos por oscilaciones.

· Se aplica en:

- Cosmología
- Teoría Cuántica de Campos
- Física atómica
- Óptica, etc.

- Dada su gran versatilidad, es importante conocer los principios detrás de este fenómeno.

5.2. Ley de Hooke

- Una masa sujeta a un resorte experimenta una fuerza:

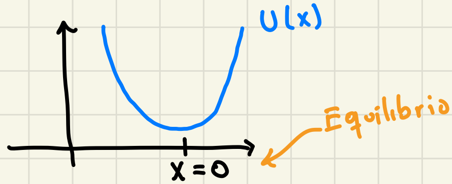
$$F(x) = -kx \tag{5.1}$$

en la dirección del resorte. Aquí, x es el desplazamiento desde el equilibrio y k una constante.

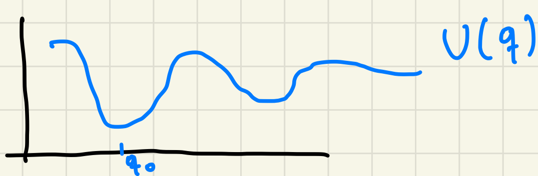
- El potencial es:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.2}$$

que tiene como mínimo la posición de equilibrio.



- Ahora consideremos un sistema con un potencial $U(q)$, con punto de equilibrio q_0.



- Cerca de q_0 expandimos:

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0)x + \frac{1}{2}U''(q_0)x^2 + \dots$$

con $x = q - q_0$. Tenemos:

$U(q_0) \rightsquigarrow$ Constante

$U'(q_0) \rightsquigarrow$ es cero (mínimo)

y nos queda:

$$U(x) \approx \frac{1}{2}U''(q_0)\,x^2, \qquad (5.3)$$

que tiene gran similitud a (5.2).

<u>Conclusión</u>: esto va más allá de solo resortes.

$\rightsquigarrow$ dinámica en la proximidad del equilibrio.

- Llamémosle:

<u>Oscilador armónico</u>

· El Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad (5.4)$$

con $k = \frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_0} > 0$.

· Las e.o.m son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (5.5)$$

¿Soluciones?

Proponemos: $x(t) = Ce^{\lambda t}$, con λ por determinar.

· Introducimos en (5.5):

$$m\lambda^2 \cancel{Ce^{\lambda t}} + k\cancel{Ce^{\lambda t}} = 0$$

$$\rightsquigarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m},$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0,$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador.

· Tenemos dos soluciones; superposición.

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \qquad (5.6)$$

· Otra forma de escribir esto es si tomamos

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \sin\omega_0 t$$

y reescribimos (5.6):

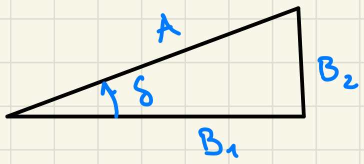
$$x(t) = B_1 \cos\omega_0 t + B_2 \sin\omega_0 t, \qquad (5.7)$$

con $B_1 = C_1 + C_2$, $B_2 = i(C_1 - C_2)$.

· Yet another forma de escribirlo es definiendo

$$A = (B_1^2 + B_2^2)^{1/2},$$

que puede verse como:



· Reescribimos (5.7) :

$$x(t) = A\left(\frac{B_1}{A}\cos\omega_0 t + \frac{B_2}{A}\sin\omega_0 t\right)$$

$$= A\left(\cos\delta\cos\omega_0 t + \sin\delta\sin\omega_0 t\right)$$

$$= A\cos(\omega_0 t - \delta) \qquad (5.8)$$

· Todas son formas equivalentes de escribir la sol. general del oscilador armónico.

· Por último, notamos que :

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= C_1 + C_2 \\ B_2 &= i(C_1 - C_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_1 &= C_1 + C_2 \\ iB_2 &= -(C_1 - C_2) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{2}(B_1 - iB_2) \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}(B_1 + iB_2) \end{aligned}\right\} \text{ con } C_2 = C_1^* .$$

Reescribimos (5.6) :

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_1^* e^{-i\omega_0 t} .$$

Dado que cualquier número complejo cumple

$$z + z^* = x + iy + (x - iy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z),$$

tenemos:

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\, C_1 e^{i\omega_0 t}.$$

Si definimos $C = 2C_1 = B_1 - iB_2$,

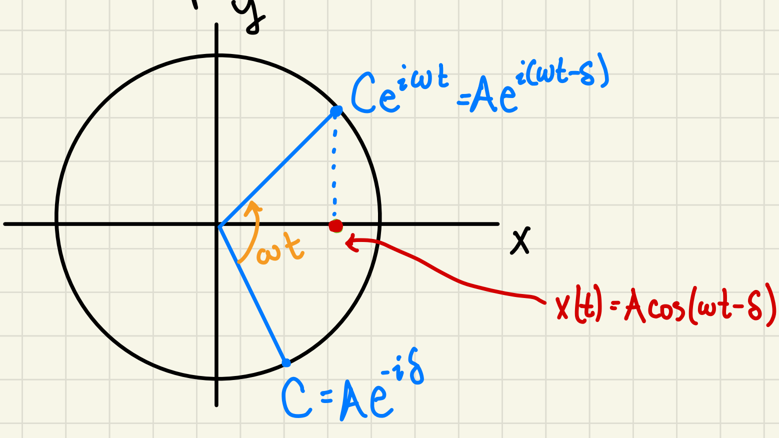
$$\Rightarrow A\left(\frac{B_1}{A} - i\frac{B_2}{A}\right) = A(\cos\delta - i\sin\delta)$$

$$= Ae^{-i\delta} \overset{\nabla}{=} C$$

Finalmente,

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\, Ae^{i(\omega_0 t - \delta)}} \qquad (5.9)$$

· Esto puede verse como:



· El punto rojo va y viene sobre el eje x.

· El punto azul se mueve sobre el círculo, con velocidad: ωt.

5.3. Oscilador armónico amortiguado.

· Supón que además del potencial conservativo tenemos una **fuerza disipativa**

$$\rightsquigarrow m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \qquad (5.10)$$

tiene soluciones del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$.

· Los detalles de esto quedan para el lector.

$\rightsquigarrow$ Parte del 2do Parcial.

- Revisar la teoriá
- Buscar ejemplos
- Resolver ejercicios.

Die Zeit läuft schell ab!

5.4. Osciladores acoplados

· Consideraremos sistemas de cuerpos conectados por resortes

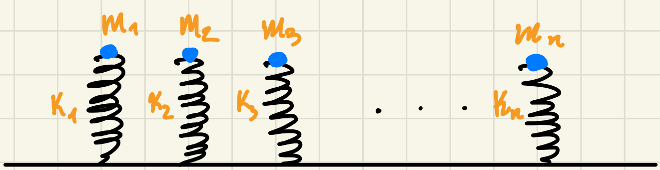
⇝ moléculas

→ cristales

⇝ campos (QFT)

La pregunta es,

¿Qué pasa si juntamos muchos osciladores?



· En este caso, no pasa nada.

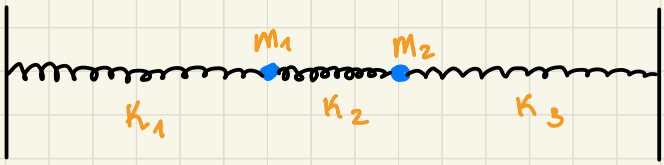
⇝ Cada uno vibra libremente.

Pero,

¿Si están <u>acoplados</u>?

5.4.1. Cadena de dos masas

- Consideremos dos masas conectadas por resortes, entre sí y a los puntos fijos



- Definiendo x_1 como el desplazamiento a partir del equilibrio para m_1 (igual para m_2), la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 .$$

- La potencial, para cada resorte

$$U = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 x_2^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 .$$

- El Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 x_1^2 - \frac{1}{2} K_3 x_2^2 - \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 \qquad (5.11)$$

· Las e.o.m arrojan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -(k_1+k_2)x_1 + k_2 x_2$$

Igual para x_2.

· Esto arroja:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(k_1+k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2 x_1 - (k_2+k_3)x_2 \end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

· Notemos que, definiendo

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}.$$

(5.12) puede escribirse como

$$\boxed{M \ddot{\vec{x}} = -K\vec{x}} \quad (5.13)$$

⇝ versión matricial del oscilador armónico.

¿Cómo resolvemos (5.12)?

· Podemos proponer (de la forma $x_i = \mathrm{Re}\, z_i$):

$$z_1 = a_1 e^{i\omega t},$$
$$z_2 = a_2 e^{i\omega t}.$$

· Ponemos esto en un vector:

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{a}\, e^{i\omega t}, \quad \vec{x}(t) = \mathrm{Re}\, \vec{z}(t).$$

que será solución a (5.13).

· Sustituyendo,

$$-\omega^2 M \vec{a}\, \cancel{e^{i\omega t}} = -K \vec{a}\, \cancel{e^{i\omega t}}$$
$$-\omega^2 M \vec{a} = -K \vec{a}$$
$$\boxed{(K - \omega^2 M)\vec{a} = 0} \qquad (5.14)$$

- Sistema algebraico para amplitudes $\vec{a}$.

- ω^2 es el eigenvalor y $\vec{a}$ el eigenvector.
- Se resuelve como un típico problema de eigenvalores.

$$\rightsquigarrow \boxed{\det(K-\omega^2 M)=0} \qquad (5.15)$$

· Su solución da las frecuencias para la solución $x(t)$.

$\rightsquigarrow$ frecuencias normales

$\rightsquigarrow$ $\vec{a}$: modos normales

· Para simplificar, tomemos

$$m=m_1=m_2\ , \quad k=k_1=k_2=k_3 .$$

Entonces,

$$M=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\ , \quad K=\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K-\omega^2 M=\begin{pmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-m\omega^2 \end{pmatrix}$$

· El determinante es:

* Cuidado con k pequeña y K grande.

$$\det(K-\omega^2 M) = (2k-m\omega^2)^2 - k^2 .$$

Definiendo $\lambda = \omega^2$:

$$4k^2 + m^2\lambda^2 - 4km\lambda - k^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow m^2\lambda^2 - 4km\lambda + 3k^2 = 0$$

Resolviendo con la chicharronera:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad (5.16)$$

· Oscilación armónica para dos masas

· Una de ellas, ω_1, es la de una masa.

¿Qué sucede?

Revisemos los modos normales:

Caso ω_1:

Tenemos $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, lo introducimos en (5.14):

$$K - \omega_1^2 M = \begin{pmatrix} 2k - m\frac{k}{m} & -k \\ -k & 2k - m\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{a} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = 0,$$

Definimos: $a = a_1 = a_2$.

Entonces,

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}.$$

- Con el mismo truco que en (5.9), escribimos

$a = Ae^{-i\delta}$

$$\boxed{x(t) = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t - \delta)} \quad (5.17)$$

Esto es, las dos masas oscilan con la misma frecuencia, amplitud y fase.

⇝ El resorte de enmedio no afecta.

· **Caso ω_2** :

Tenemos $\omega_2 = \sqrt{3K/m}$

$$\Rightarrow K - \omega_2^2 M = \begin{pmatrix} 2K - m\frac{3K}{m} & -K \\ -K & 2K - m\frac{3K}{m} \end{pmatrix}$$

$$= -K \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = -a_2 \equiv a \end{array} \right.$$

· Esto nos lleva a :

$$\boxed{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta)} \qquad (5.18)$$

Esto es :

- misma frecuencia, amplitud y fase pero dirección opuesta.

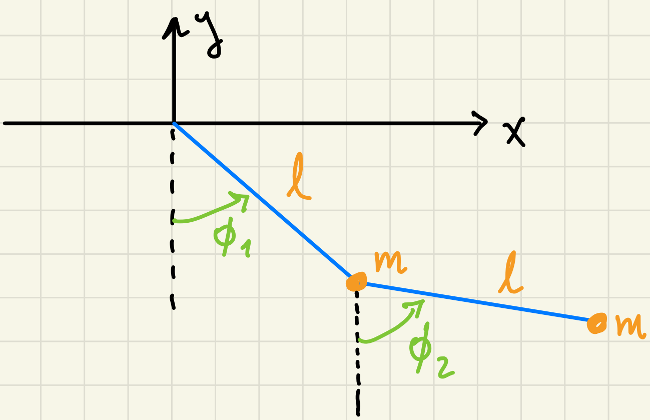
⇝ El resorte central se comprime y expande.

- La solución general del sistema:

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \quad (5.19)$$

5.4.2 Péndulo doble

- Veamos el caso donde M no es diagonal, y K sí.



- Mismas masas y longitudes.
- Coord. generalizadas:

$$\phi_1 , \phi_2 .$$

· Las energías son:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

$$U = mg \left(y_1 + y_2 \right)$$

Pasamos a coord. generalizadas:

$$x_1 = l \sin\phi_1 \quad , \quad x_2 = l(\sin\phi_1 + \sin\phi_2)$$
$$y_1 = -l\cos\phi_1 \quad , \quad y_2 = l(\cos\phi_1 + \cos\phi_2)$$

· El potencial es entonces:

$$U = -mgl(\cos\phi_1 + \cos\phi_1 + \cos\phi_2)$$
$$= -mgl(2\cos\phi_1 + \cos\phi_2) \quad (5.20)$$

· La cinética:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \Big(2\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) \Big) .$$

(5.21)

- Investiguemos pequeñas oscilaciones cerca del equilibrio $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

$$U(\phi_1, \phi_2) \simeq \cancel{U(0,0)} + \cancel{\frac{\partial U}{\partial \phi_1}\Big|_{(0,0)} \phi_1} + \cancel{\frac{\partial U}{\partial \phi_2}\Big|_{(0,0)} \phi_2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1^2}\Big|_{(0,0)} \phi_1^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}\Big|_{(0,0)} \phi_1 \phi_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_2^2}\Big|_{(0,0)} \phi_2^2$$

Esto arroja:

$$U \simeq \frac{1}{2} mgl \left(2\phi_1^2 + \phi_2^2 \right) \qquad (5.22)$$

- Aproximamos también la cinética

$$T \simeq \frac{1}{2} ml^2 \left(2\dot{\phi}_1^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2^2 \right) \qquad (5.23)$$

- Con esto podemos encontrar las matrices M y K:

$$M = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix}$$