6. Sistemas no inerciales

6.1. Motivación

¿Por qué estudiar estos sistemas?

1. En la práctica, los sistemas inerciales son difíciles de "encontrar".

   ⇝ Tenemos que adaptarnos.

   - Por ejemplo, las leyes de Newton aplican solo en sistemas inerciales.

   → Necesitamos extender estas ideas a no inerciales.

2. Comprender las fuerzas ficticias.

   Por ejemplo,

   - Fuerza centrífuga,
   - Fuerza de Coriolis.

3. Aplicaciones:

· Necesitamos los efectos de la rotación de la Tierra sobre un cohete.

· Para comenzar el tema, consideremos dos sistemas:

$$S_0 \longrightarrow \text{inercial}$$

$$S \longrightarrow \text{no inercial.}$$

S tiene aceleración $\vec{A}$ respecto a S_0, y velocidad:

$$\dot{\vec{V}} = \vec{A}.$$

· Supongamos que se trata de un carro con un pasajero lanzando una moneda.

· Dado que S_0 es inercial, la dinámica de la moneda:

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}. \qquad (6.1)$$

donde $\vec{r}_0$ es la posición rel. a S_0.

· Aquí, $\vec{F}$ representa todas las fuerzas actuando sobre el cuerpo.

⇝ gravity, air resistence, etc.

· Visto desde S, la posición es $\vec{r}$.
Entonces, por la ley de adición de velocidades:

$$\dot{\vec{r}}_o = \dot{\vec{r}} + \vec{V} \qquad (6.2)$$

que significa:

$$\begin{pmatrix}\text{vel. moneda} \\ \text{respecto al suelo}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{vel moneda} \\ \text{respecto al carro}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{vel. carro} \\ \text{resp. al suelo}\end{pmatrix}$$

· Diferenciando y multiplicando por m:

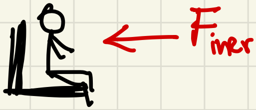
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{A} \qquad (6.3)$$

⇝ Segunda Ley de Newton, excepto por el término $-m\vec{A}$.

· Esta es la fuerza inercial

$$\vec{F}_{inercial} = -m\vec{A} \qquad (6.4)$$

· Un ejemplo de esta fuerza, considera un avión que está por despegar

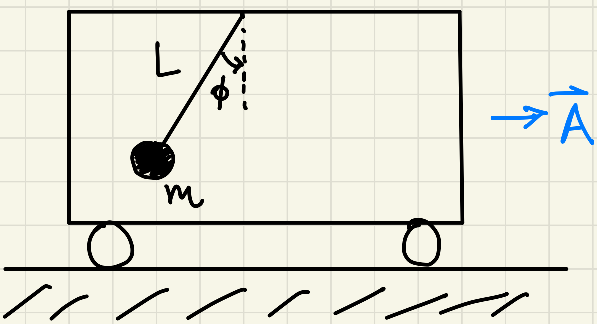


La fuerza que "te empuja" al asiento es la inercial.

En realidad, el asiento te empuja; tú no quieres moverte.

· Ahora, consideremos un ejemplo más formal:

- Péndulo en un carro acelerado.



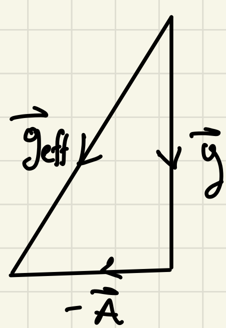
· Fuerzas actuando sobre m:

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$$

con $\vec{T}$: tensión.

· Si decidimos pasar al non-inertial frame, tenemos que agregar un término $-m\vec{A}$:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{A}$$
$$= \vec{T} + m\vec{g}_{eff}$$



con $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{A}$.

· Esta es precisamente la ecuación de un péndulo en un marco inercial.

· Recordando que

$$\omega = \sqrt{g/L},$$

en nuestro caso reemplazamos $g \to g_{eff}$ con:

$$g_{eff} = \sqrt{g^2 + A^2}.$$

La frecuencia será entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2+A^2}}{L}}.$$

· Aplicación interesante.

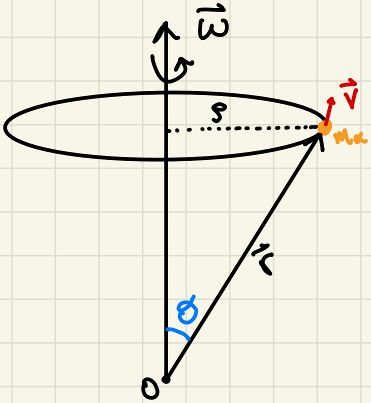
- Las mareas.

⇝ Investigar sobre este tema, fuerzas de marea.

6.2. Velocidad Angular Revisited.

· Ahora concentrémonos en marcos de referencia en rotación.

· Recordando del capítulo 4: Cuerpo Rígido



· La velocidad de partícula está dada por

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{r\sin\theta}$$

$$\rightsquigarrow v = \omega r \sin\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \qquad (6.5)$$

con regla de la mano derecha.

· En realidad, este es parte de un resultado más general:

Si $\hat{e}$ es un vector unitario atado al cuerpo:

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e} \qquad (6.6)$$

*Adición de velocidades:

- De Física 1:

La vel. relativa entre dos frames 1 y 2 es $\vec{v}_{21}$ y si un tercer frame relativo al 2 tiene una vel. $\vec{v}_{32}$, entonces:

$$\vec{V}_{31} = \vec{V}_{32} + \vec{V}_{21} \qquad (6.7)$$

- Ahora consideremos lo mismo, pero para rotating frames:

frame

$$\left.\begin{array}{ll} 2 \to 1 : & \vec{\omega}_{21} \\ 3 \to 2 : & \vec{\omega}_{32} \end{array}\right\}$$

¿Cómo es $3 \to 1$?

De (6.5) y (6.7), sabemos que las velocidades "translacionales". ← Las de siempre.

$$\vec{V}_{31} = \vec{V}_{32} + \vec{V}_{21}$$

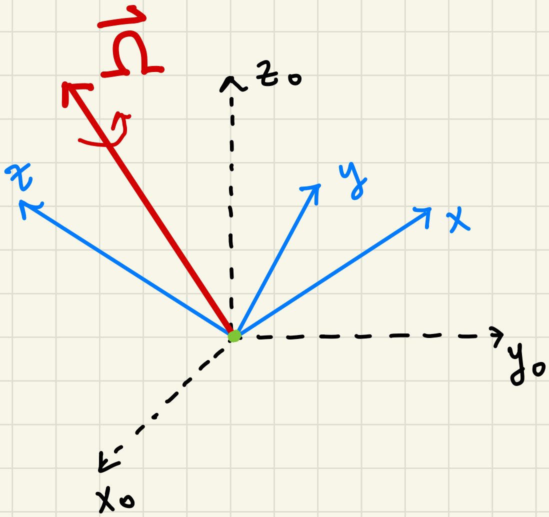
$$\hookrightarrow \vec{\omega}_{31} \times \vec{r} = \vec{\omega}_{32} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}$$

$$= (\vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}) \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21} \qquad (6.8)$$

Como era de esperarse.

- Ahora consideremos el siguiente set-up:



- Sistema S_0 : $\{x_0, y_0, z_0\}$
- Sistema S : $\{x, y, z\}$

- Sistema S gira con vel. angular $\vec{\Omega}$ respecto a S_0.

- Consideremos un vector arbitrario $\vec{Q}$.

La pregunta es,

→ ¿Cómo se ve la tasa de cambio $d\vec{Q}/dt$ desde S_0 y S?

Definamos:

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = (\text{tasa de cambio rel. a } S_0)$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S = (\text{tasa de cambio rel. a } S).$$

· Fijándonos en S, expandimos $\vec{Q}$:

$$\vec{Q} = Q_1\hat{e}_1 + Q_2\hat{e}_2 + Q_3\hat{e}_3 = Q_i\hat{e}_i$$

· Para S, $\hat{e}_i$ están fijos.

· Para S_0, $\hat{e}_i$ están rotando.

· Diferenciando respecto a t:

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S = \frac{dQ_i}{dt}\hat{e}_i \qquad (6.9)$$

Sabemos que desde S_0, varían en el tiempo.
Entonces,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \frac{dQ_i}{dt}\hat{e}_i + Q_i\left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} \qquad (6.10)$$

· Recordando de (6.6):

$$\left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i$$

· Con esto reescribimos el seg. term. de (6.10):

$$Q_i\left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} = Q_i(\vec{\Omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\Omega} \times (Q_i\hat{e}_i)$$
$$= \vec{\Omega} \times \vec{Q}$$

Finalmente llegamos a:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S} + \vec{\Omega} \times \vec{Q}} \quad (6.11)$$

· Relación de derivada en ambos frames.

6.3. Segunda Ley de Newton en rotating frames

· Ahora reescribamos la Segunda Ley de Newton:

Tomemos una partícula con masa m

y posición $\vec{r}$. En S_0 se cumple:

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \vec{F} \qquad (6.12)$$

·Siguiendo (6.11) tenemos:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0}}\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right]$$

·Aplicamos otra vez (6.11) a la derivada:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_S\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right]$$

$$+\,\vec{\Omega}\times\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right]$$

· Definiendo $\dot{\vec{Q}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_s$ y considerando $\vec{\Omega}$ constante:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

Utilizando (6.12) tenemos:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + 2m\dot{\vec{r}}\times\vec{\Omega} + m(\vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{\Omega}} \quad (6.13)$$

que es como (6.3), pero con dos términos nuevos:

- **Fuerza de Coriolis:**

$$\vec{F}_{cor} = 2m\dot{\vec{r}}\times\vec{\Omega} \quad (6.14)$$

- **Fuerza centrífuga:**

$$\vec{F}_{cf} = m(\vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{\Omega} \quad (6.15)$$