· Tomando $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, tenemos que las e.o.m son:

$$M\ddot{\phi} = -K\phi$$

que se resuelve como el prob. de eigenvalues.

· Para el péndulo doble, se puede mostrar que:

$$\omega^2 = \omega_0^2(2 \pm \sqrt{2})$$

lo cual da dos soluciones $\left(\omega_0 = \sqrt{g/\ell}\right)$:

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0 < \omega_0$$

$$\omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0 > \omega_0$$

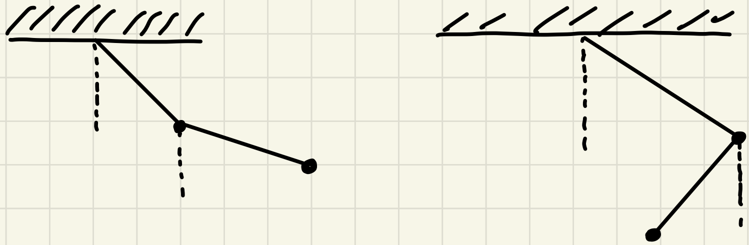
dos frecuencias: una mayor y otra menor a ω_0.

· Los modos normales dan:

$$a_1 = (1, \sqrt{2})$$

$$a_2 = (1, -\sqrt{2})$$

· Esto puede verse como:



- Para ω_1 - Para ω_2

5.5. Pequeñas Oscilaciones: Caso General

· Consideremos el caso general de un sistema con n grados de libertad:

$$U(\vec{q}) = U(q_1, \dots, q_n)$$

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(\vec{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad (5.24)$$

donde a_{ij} describe la distribución de masas y como contribuyen a la energía cinética.

· Denotando al equilibrio como q_i^0 $(\vec{q}_0)$ y η_i una perturbación:

$$q_i = q_i^0 + \eta_i \qquad (5.25)$$

· Dado que nos interesa la dinámica cerca del equilibrio

$\vec{q}_0$ equilibrio

$$U(\vec{q}) \approx \underbrace{U(\vec{q}_0)}_{\text{constante}} + \sum_i \cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{\vec{q}_0}} \eta_i$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{\vec{q}_0}}_{k_{ij}} \eta_i \eta_j \qquad (5.26)$$

· Para la energía cinética, expandimos a_{ij} :

$$a_{ij}(\vec{q}) = \underbrace{a_{ij}(\vec{q}_0)}_{m_{ij}} + \sum_{\ell} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\ell}\Big|_{\vec{q}_0} \eta_\ell + \dots \qquad (5.27)$$

· Solo tomamos m_{ij} (distribución de masa const.).

· Con esto escribimos el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left(m_{ij}\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - k_{ij}\eta_i \eta_j \right) \qquad (5.28)$$

de aquí podemos definir las matrices

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

· Las e.o.m. son entonces:

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j k_{ij} \eta_j = 0 \qquad (5.29)$$

que son n ecuaciones acopladas.

· La propuesta de solución:

$$\vec{z}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}, \quad \vec{\eta} = \operatorname{Re} \vec{z}(t)$$

· Sustituyendo en (5.29):

$$(K - \omega^2 M)\vec{a} = 0$$

y para no tener solución trivial, debe cumplirse que

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \qquad (5.30)$$

para cada raíz $\longrightarrow \vec{a} e^{i\omega t}$.

· La solución general es entonces

$$\vec{z}(t) = \sum_j c_j \vec{z}_j(t) = \sum_j c_j \vec{a}_j e^{i\omega_j t} \qquad (5.31)$$

5.5.1. Coordinadas normales

· Vemos que (5.31) es complicada.

$\rightsquigarrow$ $\vec{\eta}$ oscila con todas las frecuencias mezcladas.

las componentes

¿Qué tal un cambio de coordenadas?

· Primero, estudiemos los modos normales,

$$K\vec{a}_j = \lambda_j M\vec{a}_j \qquad (5.32)$$

· Nota que en (5.32), $K\vec{a}$ no es prop a $\vec{a}$, si no $M\vec{a}$.

Si tomamos dos modos

$$K\vec{a}_i = \lambda_i M\vec{a}_i \quad , \quad K\vec{a}_j = \lambda_j M\vec{a}_j$$

$$\vec{a}_j^{\dagger} K^{\dagger} = \lambda_j^* \vec{a}_j^{\dagger} M^{\dagger}$$

$$\Rightarrow \vec{a}^T K = \lambda_j a_j^T M$$

M y K reales y sim $\Rightarrow$ $M^+ = M^T = M$
$K^+ = K^T = K$

· Ahora calculamos

$$\vec{a}_j^T K \vec{a}_i - \vec{a}_j^T K \vec{a}_i = \lambda_i \vec{a}_j^T M \vec{a}_i - \lambda_j \vec{a}_j^T M \vec{a}_i$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_i - \lambda_j) \vec{a}_j^T M \vec{a}_i$$

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$$\vec{a}_j^T M \vec{a}_i = 0 \qquad (5.33)$$

⇝ Los modos normales son <u>normales</u> en la <u>métrica de masas</u>.
duh

· Además, exigimos que

$$\vec{a}_j^T M \vec{a}_j = 1 .$$

Definiendo A como la matriz de eigenvectors

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix},$$

cumple con: $\boxed{A^T M A = 1}$

$\rightsquigarrow$ A diagonaliza M.

· Ahora definimos una matriz diagonal con las autofrecuencias

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

la ecuación de eigenvalores es

$$KA = MA\lambda$$

λ conmuta, es diag.

$$A^T K A = \underbrace{A^T M A}_{1} \lambda$$

$$\rightsquigarrow \boxed{A^T K A = \lambda}$$

$\rightsquigarrow$ A diagonaliza a K

Semana de examen