4.6. Ecuaciones de Euler

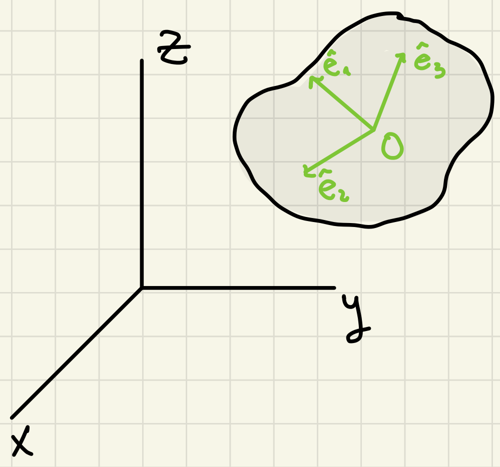
- Es momento de escribir las ecuaciones de movimiento para el cuerpo rígido.

  ⇝ Ecuaciones de Euler.

- Estas son la versión rotacional de la 2da Ley de Newton.
- Nos interesará trabajar con los ejes principales.

  ⇝ Tensor de inercia diagonal

Pero, como estos ejes están pegados al cuerpo, este sistema estará rotando.



Space frame:

- Con x, y, z y está fijo.

  ⇝ Inercial.

Body frame:

- Con $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ en rotación

  ⇝ no inercial

Recordando, en el body frame tenemos:

$$\vec{L} = (\lambda_1 \omega_1, \lambda_2 \omega_2, \lambda_3 \omega_3). \qquad (4.28)$$

· La torca vista desde el space frame:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_s = \vec{\tau} \qquad (4.29)$$

donde s denota space frame.

· La relación entre ambos espacios:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_b + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$= \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \qquad (4.30)$$

← $\frac{d}{dt}$ en body frame.

Introduciendo (4.30) en (4.29):

$$\boxed{\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\tau}} \qquad (4.31)$$

Estas son las ecuaciones de Euler.

· En componentes:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2-\lambda_3)\omega_2\omega_3 &= \tau_1 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3-\lambda_1)\omega_3\omega_1 &= \tau_2 \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1-\lambda_2)\omega_1\omega_2 &= \tau_3 \end{aligned}\right\} \quad (4.32)$$

⇝ Determinan el movimiento de un cuerpo girando visto desde un frame fijo en el cuerpo.

¿Qué pasa en el caso del "trompo" que estudiamos? TAREA

· Consideremos torca cero y estudiemos:

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferentes:

· Supongamos que el cuerpo gira sobre un eje principal:

⇝ sobre $\hat{e}_3$ $\Rightarrow$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

· De (4.32):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

"Un cuerpo girando sobre un eje principal no sujeto a torca permanecerá girando a vel. ang. const."

· Si no gira sobre un eje principal, al menos dos comp. de $\vec{\omega}$ no son cero.

$\leadsto$ Al menos un $\dot{\omega}_i \neq 0$.

$\leadsto$ $\vec{\omega}$ no constante

Conclusión: velocidad angular constante con λ_i diferentes solo sobre un eje principal.

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$:

· De (4.32) tenemos:

$$\dot{\omega}_3 = 0$$

$$\leadsto \quad \omega_3 = \text{constante.}$$

Reescribimos las ec. de Euler como:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)}{\lambda_1}\omega_3\omega_2 \equiv \Omega_b \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)}{\lambda_1}\omega_3\omega_1 \equiv -\Omega_b \omega_1 \end{aligned}\right\} \quad (4.33)$$

con $\Omega_b = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}\omega_3$.

La solución general es:

TAREA

$$\vec{\omega} = \left(\omega_0 \cos \Omega_b t,\ -\omega_0 \sin \Omega_b t,\ \omega_3\right), \qquad (4.34)$$

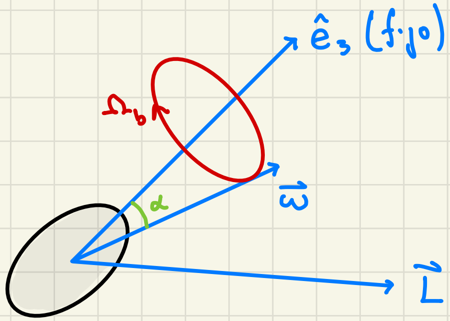
con ω_0, ω_3 constantes.

Con esto podemos concluir un par de cosas:

→ Las componentes ω_1 y ω_2 rotan con velocidad angular Ω_b mientras ω_3 es constante.

→ Dados ω_0 y ω_3 constantes, también el ángulo α entre $\vec{\omega}$ y $\hat{e}_3$.

Visto desde el body frame, $\vec{\omega}$ se mueve en un cono:



$\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ precesan sobre el eje de simetría $\hat{e}_3$

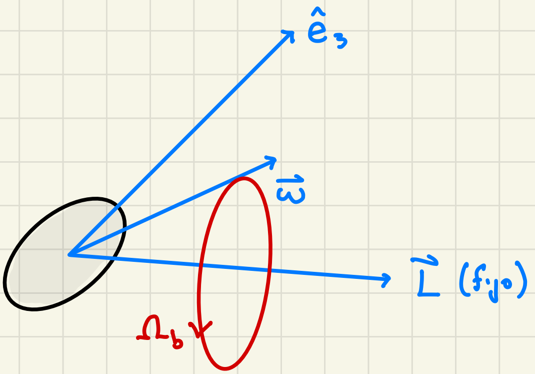
→ body cone

· El momento angular:

$$\vec{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_1\omega_2, \lambda_3\omega_3)$$
$$= (\lambda_1\omega_0\cos\Omega_b t, -\lambda_1\omega_0\sin\Omega_b t, \lambda_3\omega_3) \quad (4.35).$$

$\rightsquigarrow$ $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ y $\hat{e}_3$ están en un solo plano.

· Visto desde el space frame:



· Aquí, $\vec{L}$ es fijo; $\vec{\omega}$ y $\hat{e}_3$ precesan sobre $\vec{L}$.

TAREA

$\rightsquigarrow$ space cone

· A esto se le conoce como precesión libre

$\rightsquigarrow$ ¡no hay torcas!

4.7. Ángulos de Euler

- Problema con las ecs. de Euler
  - ⇝ ejes fijos en el cuerpo.
  - ⇝ Complicado trabajar con ellos.
- Necesitamos ecuaciones de mov. relacionadas al space frame.
- Para esto, introducimos los ángulos de Euler.

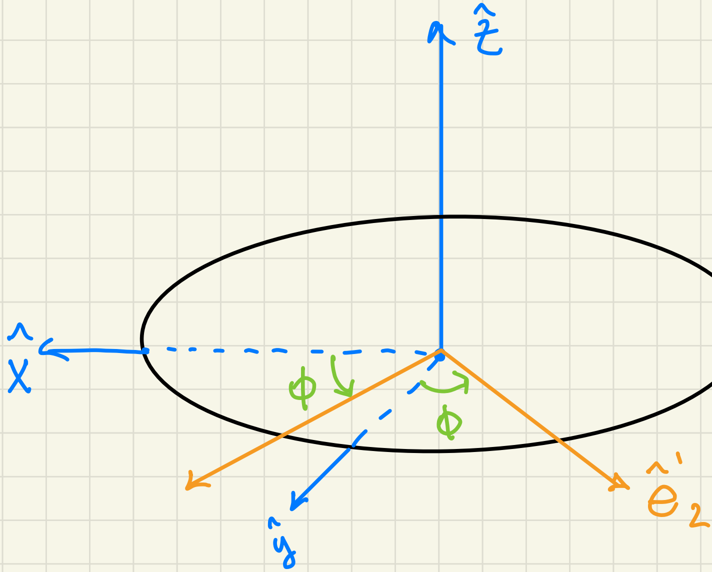
Elegimos el punto sobre el que gira el cuerpo como origen del body y space frames:

space frame: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

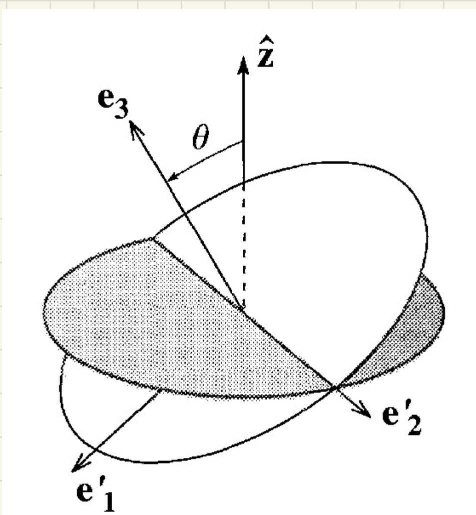
body frame: $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

Claim: con tres rotaciones, a través de θ, ϕ, ψ especificaremos la orientación del cuerpo.

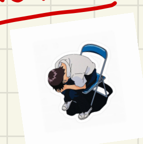
Paso 1: Ambos sistemas alineados.
Giramos sobre z un ángulo ϕ.



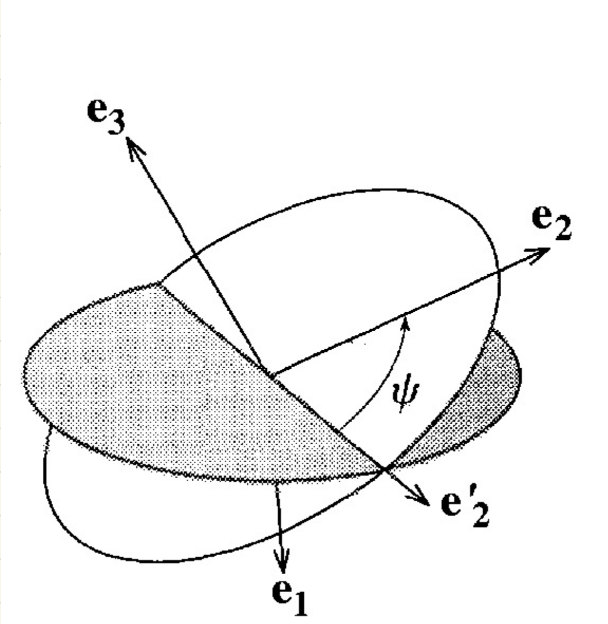
Paso 2: Giramos sobre el eje $\hat{e}'_2$ un ángulo θ:



Me rendí



Paso 3. Giramos sobre el eje $\hat{e}_3$



· Estos tres ángulos son los tres ángulos de Euler,

$$\theta, \phi, \psi.$$

y especifican la dirección del cuerpo.

· Ahora calculemos algunas cantidades físicas.

Se puede mostrar que

TAREA

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{e}'_2 + \dot{\psi}\,\hat{e}_3 \qquad (4.36)$$

· De igual forma, es posible mostrar que el momento angular es:

con $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\vec{L} = \left(-\lambda_1 \dot{\phi} \sin\theta\right) \hat{e}_1' + \lambda_1 \dot{\theta} \hat{e}_2' + \lambda_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) \hat{e}_3 \quad (4.37)$$

TAREA

· Con esto, es posible escribir la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}\lambda_1 \left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\lambda_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 \quad (4.38).$$

Finalmente podemos, por ejemplo, escribir el Lagrangiano de el "trompo":

$$L = \frac{1}{2}\lambda_1 \left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\lambda_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - MgR\cos\theta.$$

¿Qué info podemos sacar de aquí con solo ver el Lagrangiano?