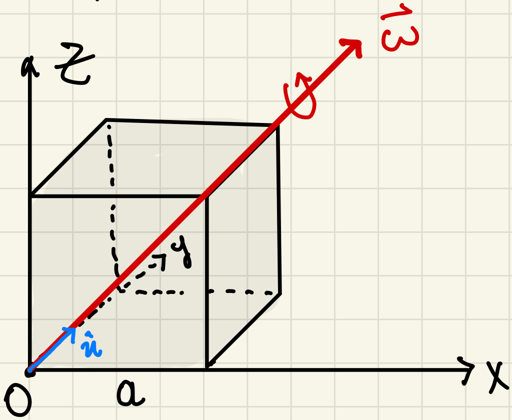
¿Qué pasa ahora si tomamos una $\vec{\omega}$ que atraviese el cubo?



· El vector unitario $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

ayuda a escribir $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{u} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

· En este caso, el momento angular es

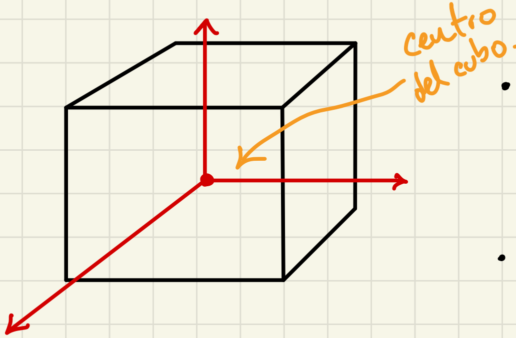
$$\vec{L} = \underline{I}\vec{\omega} = \frac{Ma^2}{12}\frac{\omega}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Ma^2}{12}\frac{\omega}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Ma^2}{6}\vec{\omega}.$$

· En este caso, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ son paralelos.

¿Qué pasa si movemos el origen al centro del cubo?



- En este caso, integramos entre $-a/2$ y $a/2$.

- Encontramos:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \tfrac{1}{6} Ma^2$$ Diagonal

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = \dots = 0$$ off-diagonal.

Con esto se obtiene,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{6} Ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} Ma^2 \mathbb{1}$$

- El momento angular:

$$\vec{L} = \mathrm{I}\vec{\omega} = \frac{1}{6} Ma^2 \vec{\omega}.$$

- Mismo resultado que el caso anterior.

  ⇝ Alto grado de simetría del cubo.

- Aquí, $\vec{L}$ siempre apuntará en la dirección de $\vec{\omega}$.

4.4. Ejes Principales de Inercia

· Vimos que, en general, $\vec{L}$ no siempre es paralelo a $\vec{\omega}$.

Cuando sí lo son, decimos que el eje sobre el que rota es

el eje principal.

· Podemos definir el eje principal de un cuerpo si

$$\vec{L} = \lambda \vec{\omega}, \qquad (4.18)$$

con λ un número real.

¿Qué es λ?

· Supongamos que tenemos una rotación en z:

$$\rightsquigarrow \vec{L} = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega)$$

Dado que $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ son paralelos

$$\vec{L} = (0, 0, I_{zz}\omega)$$

$\Rightarrow \lambda$ es el momento de inercia sobre el eje de rotación.

- En el caso de que el tensor de inercia sea diagonal:

$$I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

tenemos que los ejes x, y y z son ejes principales.

- De igual forma, si x, y y z son ejes principales, I debe ser diagonal. IMPORTANTE.
- Entonces, en (4.19) tenemos:

λ_i son los momentos principales.

¿Qué pasa en casos más generales? (no tan simétricos).

- Afortunadamente, siempre es posible encontrar tres ejes principales para un cuerpo rígido!

$\rightsquigarrow$ Teorema de Steiner $\leftarrow$ De tarea.

In short, siempre podemos encontrar un sistema coord. donde I es diag.

¡No hay productos de inercia!

⇝ Simplifica los cálculos.

¿Cómo encontramos estos ejes?

· Supongamos que I no es diagonal.

La clave: Si $\vec{\omega}$ apunta en un eje principal,

$$\Rightarrow \vec{L} = \lambda\vec{\omega}.$$

Pero también sabemos que

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

entonces, se cumple que:

$$\boxed{I\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}} \tag{4.20}$$

⇝ Problema de eigenvalores.

· Comenzamos con:

$$(I - \lambda \mathbb{1})\vec{\omega} = 0,$$

que tiene solución si y solo si

$$\det(I - \lambda \mathbb{1}) = 0 \qquad (4.21)$$

· Esta solución nos dará, en general, tres soluciones

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

los tres momentos principales.

· Así, encontramos $\vec{\omega}$, que nos da la dirección de un eje principal.

Ejemplo: <u>el cubo, de nuevo</u>.

• Encontremos los ejes principales de un cubo que gira sobre una de sus caras.

· Ya sabemos que

$$I = \frac{Ma^2}{12}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

· Dado que no es diagonal, nuestra primera elección de ejes no son los principales.

· Utilizando (4.21):

$$I - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 8\mu - \lambda & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - \lambda & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - \lambda \end{pmatrix},$$

donde $\mu = \frac{Ma^2}{12}$

· El determinante:

$$\det(I - \lambda \mathbb{1}) = (2\mu - \lambda)(11 - \lambda)^2.$$

Sus eigenvalores:

$$\lambda_1 = 2\mu \quad y \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu. \qquad (4.22)$$

· Con esto, podemos calcular los eigenvectores

$\rightsquigarrow$ dirección de los tres ejes principales.

Tomemos λ_1 :

$$(I - \lambda \mathbb{1})\vec{\omega} = \mu \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = 0$$

Esto arroja el sistema de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2\omega_x - \omega_y - \omega_z = 0 \\ (2) & -\omega_x + 2\omega_y - \omega_z = 0 \\ (3) & -\omega_x - \omega_y + 2\omega_z = 0 \end{array}\right\}$$

Haciendo (1) − (2) :

$$3\omega_x - 3\omega_y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_x = \omega_y}.$$

Luego (1) − (3) :

$$3\omega_x - 3\omega_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_x = \omega_z}$$

Concluimos que el primer eje principal está en la dirección de $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$
$$= \omega(1,1,1)$$

$\rightsquigarrow$ Eje principal apunta en $(1,1,1)$.

Diagonal del cubo.

· Definiendo $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (4.23), este vector indica la dirección del eje.

Entonces,

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \lambda_1 \vec{\omega}$$
$$= 2\mu\vec{\omega}$$
$$= \frac{1}{6}Ma^2\vec{\omega}$$

Conclusión: el momento de inercia sobre este eje principal es λ_1.

Tomamos $\lambda_2 = \lambda_3$:

$$(I - \lambda 1\!\!1)\vec{\omega} = \mu \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = 0$$

Esto nos arroja:

$$\omega_x + \omega_y + \omega_z = 0 . \qquad (4.24)$$

$\rightsquigarrow$ No determina la dirección de $\vec{\omega}$.

¿Qué significa?

· Nota que (4.24) puede escribirse, con ayuda de (4.23) como:

$$\vec{\omega} \cdot \hat{e}_1 = 0 .$$

Esto es, $\vec{\omega}$ debe apuntar en cualquier dirección ortogonal a $\hat{e}_1$.

· Entonces, los otros ejes principales tendrán momento de inercia $\lambda_2 = \lambda_3$.

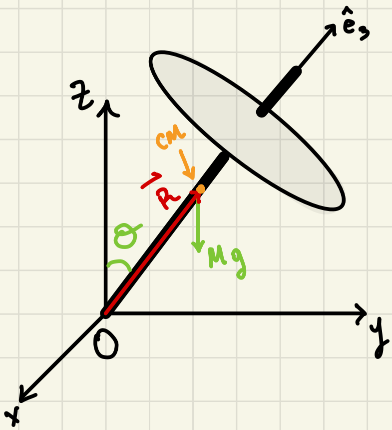
· Por último, evaluamos I en estos nuevos ejes:

$$I' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} M a^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: no siempre tendremos eigenvalores repetidos, este fue el caso por la <u>simetría del cubo</u>.

4.5 Precesión

· Exploremos un ejemplo donde se aplique la maquinaria que desarrollamos.



· Trompo de masa M fijo en O.

· Dada la simetría del problema, tenemos:

$$I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

· <u>Caso 1</u>: No hay gravedad.

⇝ El trompo gira sobre su eje de simetría, con

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3 \quad y \quad \vec{L} = \lambda_3 \vec{\omega} = \lambda_3 \omega \hat{e}_3 \qquad (4.25)$$

· No hay torca (gravity) $\Rightarrow$ $\vec{L} = const$.

⇝ Va a seguir girando.

Caso 2: Prendemos la gravedad.

- Esto generará una torca:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times M\vec{g}$$ ← Perpendicular a z y $\hat{e}_3$.

$$|\vec{\tau}| = RMg\sin\theta$$

- La existencia de una torca implica cambio en $\vec{L}$:

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}.$$

⇝ Cambio en $\vec{\omega}$ también.

- Ahora consideremos que $\vec{\tau}$ es pequeña.

Esto quiere decir que (4.25) es una buena aproximación

⇝ $\vec{L}$ cambia en dirección, pero no en magnitud.

Nota: esto solo funciona en esta aproximación.

Entonces, $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$ es:

$$\omega \lambda_3 \dot{\hat{e}}_3 = \vec{R} \times M\vec{g},$$

y reemplazando $\vec{R} = R\hat{e}_3$, $\vec{g} = -g\hat{z}$:

$$\dot{\hat{e}}_3 = \frac{MgR}{\lambda_3 \omega} \hat{z} \times \hat{e}_3$$

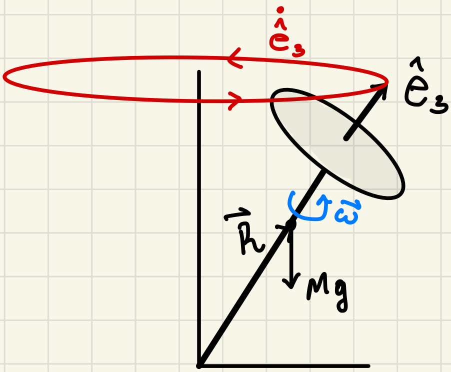
$$= \vec{\Omega} \times \hat{e}_3, \qquad (4.26)$$

donde

funciona con $\Omega \ll \omega$.

$$\vec{\Omega} = \frac{MgR}{\lambda_3 \omega} \hat{z} \qquad (4.27)$$

es la velocidad angular de prececión, inversamente prop. a ω.



Este movimiento es se debe a que:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$$

- La torca tiene dirección en dirección perpendicular a esta página.

→ Dirección de la precesión

Ejemplo: La Tierra

- La Tierra gira sobre su eje.
- El eje sobre el que gira $\theta \approx 23°$.
- No es una esfera perfecta

→ torca por la Luna y Sol.

→ Precesión lenta (26,000 años)

Fenómeno conocido como:

Precesión de los equinoccios