4. Cuerpo Rígido

- Un cuerpo rígido es una colección de N partículas cuya forma no puede cambiar.

    → La distancia entre partículas no cambia.

- Un sistema arbitrario requiere 3N coordenadas para ser descrito.

  Veremos que un cuerpo rígido solo requiere seis.

    → Tres para su centro de masa.

    → Tres para su orientación.

4.1. Propiedades del CM.

- Considerando un sistema de N partículas de masa m_α, $\alpha = 1, \ldots, N$ y posición $\vec{r}_\alpha$:

Centro de masa.

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \tag{4.1}$$

donde M es la masa total de la partículos.

- El momento total es:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

$$= M\dot{\vec{R}}. \qquad (4.2)$$

- Esto es, el sistema se mueve como una partícula de masa M y con la velocidad del CM.

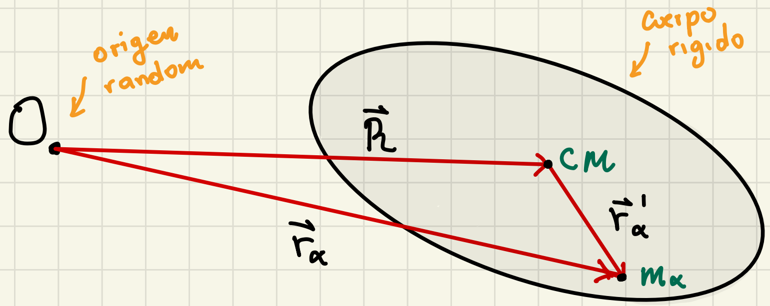
- Diferenciando (4.2) respecto a t:

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}$$

$$\leadsto \boxed{\vec{F}^{ext} = M\ddot{\vec{R}}} \qquad (4.3)$$

Fuerzas internas no afectan la evolución del sistema

- Ahora hablemos sobre el momento angular total.



Tenemos que:

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}'_\alpha . \qquad (4.4)$$

El momento angular l_α de m_α en O:

$$\vec{l}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha .$$

El momento angular total relativo a O:

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{l}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha . \qquad (4.5)$$

Utilizando (4.4) en $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \sum \vec{R} \times m_\alpha \dot{\vec{R}} + \sum \vec{R} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha + \sum r'_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{R}} + \sum \vec{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha$$

$$= \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \sum m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha + \left(\sum m_\alpha \vec{r}'_\alpha\right) \times \dot{\vec{R}} + \sum \vec{r}'_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}'_\alpha \qquad (4.6)$$

• Simplifiquemos esta expresión.

· Primero, mostremos que $\sum m_\alpha \vec{r}_\alpha' = 0$.
De (4.4) tenemos:

$$\sum m_\alpha \vec{r}_\alpha' = \sum m_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{R})$$
$$= \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha - \vec{R} \sum m_\alpha \quad (4.1)$$
$$= M\vec{R} - M\vec{R}$$
$$= 0.$$

De igual forma, $\sum m_\alpha \dot{\vec{r}}' = 0$.

· Reescribimos (4.6) como:

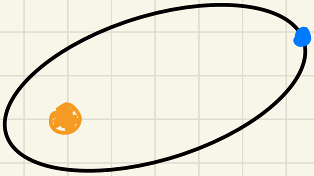
$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum \vec{r}_\alpha' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha' \qquad (4.7)$$

· Concluimos que el momento angular del sistema tiene <u>dos contribuciones</u>:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rcm}}$$

donde $\vec{L}_{cm}$ es por el centro de masas, desde un origen O.
$\vec{L}_{rcm}$ es el relativo al centro de masas.

· Por ejemplo, considera el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:



$$\vec{L} = \vec{L}_{orb} + \vec{L}_{spin}$$

→ El momento angular total de la Tierra es:

* Orbital (CM alrededor del Sol),
* Spin (Giro sobre el CM).

· Para la energía cinética total tenemos

$$T = \sum \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} .$$

Usando (4.4):

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha'^{\,2} + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\sum m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha'}_{=0} .$$

El último término es cero.

· Finalmente,

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_\alpha \dot{r}_\alpha'^2 \qquad (4.8)$$

· Esto es,

- Movimiento del CM

+

- Movimiento relativo al CM.

· Pero, el único movimiento relativo al CM es la rotación.

· La energía potencial está dada por

$$V = V^{ext} + V^{int}$$

donde V^{ext} es el potencial debido a fuerzas externas.

Las internas

$$V^{int} = \sum_{\alpha < \beta}' V_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}).$$

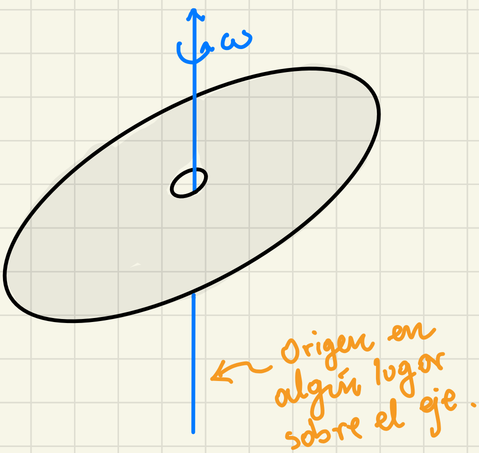
Dado que $r_{\alpha\beta}$ es constante, V^{int} también lo es!

$\rightsquigarrow$ ignorar.

- Concluimos que la única energía potencial es la debida a fuerzas externas.

4.2. Rotación sobre eje fijo

- Hemos visto que el movimiento rotacional es crucial para el estudio del cuerpo rígido.



- Por ahora, nos concentraremos en el caso de un cuerpo que rota sobre un eje fijo.

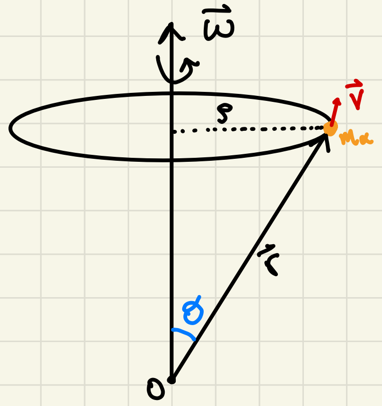
Digamos que es el eje z.

- Suponemos que el cuerpo de la figura está compuesto por masas m_α, con momento angular total.

$$\vec{L} = \sum' \vec{l}_\alpha = \sum' \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha \qquad (4.9)$$

donde $\vec{v}_\alpha$ es la velocidad de las partículas moviéndose en círculos por $\vec{\omega}$.

· Notemos que:



· La velocidad de partícula está dada por

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{\omega}{r\sin\theta}$$

$$\rightsquigarrow v = \omega r \sin\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

con regla de la mano derecha.

· Considerando que el eje z está sobre $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0),$$

y finalmente

$$\vec{\ell}_\alpha = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = m_\alpha \omega(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \quad (4.10)$$

· Sustituyendo en (4.9) la componente z:

$$L_z = \sum_\alpha' m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\omega .$$

Denotando la distancia del eje al punto (x,y,z) por $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$L_z = \sum' m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega = I_z \omega$$

con

$$\boxed{I_z = \sum' m_\alpha \rho_\alpha^2} \qquad (4.11)$$

· Esto es el momento de inercia sobre el eje z.

· Entonces, tenemos:

(momento angular) = (momento de inercia) x (velocidad angular)

· Calculemos ahora la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 .$$

Recordando que se mueve en círculos sobre z, $v_\alpha = \rho_\alpha \omega$

$$\rightsquigarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2 . \qquad (4.12)$$

ya lo habíamos usado en un problema.

· Regresando al momento angular,

¿Qué pasa con L_x y L_y?

· Sustituyendo (4.10) en (4.9):

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega, \quad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (4.13)$$

Concluimos que, aunque $\vec{\omega}$ apunta en z, $\vec{L}$ puede estar en otra dirección.

Esto es,

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

no se cumple en general.

· Ahora, un poco de notación.

· De (4.13), escribimos:

$$L_x = I_{xz}\omega \quad , \quad L_y = I_{yz}\omega$$

con

$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \quad , \quad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha .$$

· Aquí, I_{xz} y I_{yz} son los momentos de inercia.

La idea es que:

$$I_{xz} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{componente } x \text{ de } \vec{L} \\ \text{cuando } \vec{\omega} \text{ apunta en } z.\end{array}$$

De igual forma, escribimos I_z como

$$I_{zz} = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) .$$

Con esta notación,

$$\vec{L} = (I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega) . \qquad (4.14)$$

4.3. El Tensor de Inercia

• Motivación:

¿Qué pasa si el eje de rotación cambia con el tiempo?

$\rightsquigarrow$ Estudiemos esta situación.

· Consideremos un cuerpo rígido rotando sobre un eje arbitrario con

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z).$$

· Ahora calculamos su momento angular

$$\vec{L} = \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha$$
$$= \sum m_\alpha \underbrace{\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)} \qquad (4.15)$$

De tu curso de tensores,

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \varepsilon_{mni} A_n \varepsilon_{ijk} B_j C_k$$
$$= \varepsilon_{mni} \varepsilon_{ijk} A_n B_j C_k$$

$$= (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}) A_n B_j C_k$$

$$= A_k B_m C_k - A_j B_j C_m$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Escribimos:

Esto da un vector

$$\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega}_\alpha \times \vec{r}_\alpha) = \vec{\omega}_\alpha (r_\alpha^2) - \vec{r}_\alpha (\vec{r}_\alpha \cdot \vec{\omega}_\alpha)$$

<u>En x</u>: $\omega_x(x^2+y^2+z^2) - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)$

$$= \cancel{\omega_x x^2} + \omega_x(y^2+z^2) - \cancel{x^2\omega_x} - xy\omega_y - xz\omega_z$$

$$= \omega_x(y^2+z^2) - xy\omega_y - xz\omega_z$$

<u>En y</u>:

$$= -yx\omega_x + (z^2+x^2)\omega_y - yz\omega_z$$

<u>En z</u>:

$$= -zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z$$

· Sostituyendo en (4.15):

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

Si escribimos

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

la ecuación (4.16) se puede escribir como

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega},} \quad L_i = I_{ij}\omega_j \qquad (4.17)$$

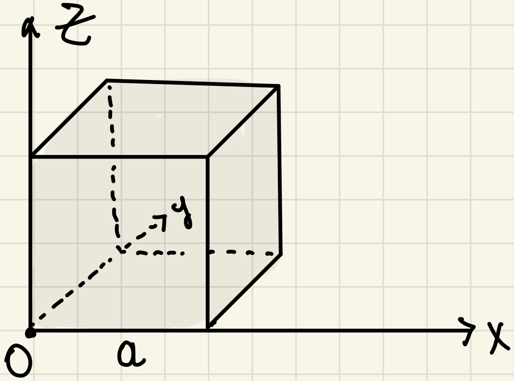
donde I es el tensor de inercia dado por

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

- Nota que I es simétrica.
- Físicamente dice:

→ cómo está distribuida la masa de un cuerpo rígido en el espacio.

Ejemplo: Un cubo sólido de lado a y masa M.



- Encontremos su tensor de inercia, considerando que gira sobre uno de sus lados.

- Para I_{xx}:

$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, \rho\,(y^2+z^2),$$

con $\rho = M/a^3$.

Integrando: $$\rho \int_0^a dx \left(\int_0^a y^2 dy\right)\left(\int_0^a dz\right) + \rho \int_0^a dx \left(\int_0^a dy\right)\left(\int_0^a z^2 dz\right)$$

$$\boxed{I_{xx} = \frac{2}{3} M a^2}$$

Por simetría,

$$I_{yy} = \frac{2}{3}Ma^2 \quad , I_{zz} = \frac{2}{3}Ma^2 .$$

· Para los términos fuera de la diagonal:

$$I_{xy} = -\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz (\rho\, x y)$$

$$= -\rho \left(\int_0^a x dx\right)\left(\int_0^a y dy\right)\left(\int_0^a dz\right)$$

$$= -\frac{1}{4}Ma^2 .$$

El resto son iguales por simetría.

· Tenemos que el tensor de inercia es

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{Ma^2}{12}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Nota que I es simétrico.

- Si consideramos que el cubo está rotando sobre x:

$$\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$$

y recordando que $\vec{L} = I\vec{\omega}$, el cubo tiene momento angular

$$\vec{L} = I\omega = \frac{Ma^2}{12}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Ma^2}{12}\begin{pmatrix} 8\omega \\ -3\omega \\ -3\omega \end{pmatrix}$$

Otra vez, $\vec{L}$ no es paralelo a $\vec{\omega}$.