

§ 1.4.2 La Métrica

- La métrica es uno de los objetos más importantes en Relatividad General.
- Sirve para :
 - Noción de pasado y futuro. *lightcone!*
 - Reemplaza al potencial grav. de Newton. *es una variable dinámica.*
 - Describe el movimiento de cuerpos en el espaciotiempo *geodésicas*
 - Medir "distancias" entre eventos.

En resumen,

"Codifica la estructura geométrica y causal del espaciotiempo."

- La métrica es un tensor tipo $(0,2)$ denotado por $g_{\mu\nu}$. Su inversa:

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu},$$

es tipo $(2,0)$ y se denota $g^{\mu\nu}$.

· Esto significa que la métrica es simétrica.

· Recordemos que nos ayuda a relacionar vectores y covectores

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

$$W^\mu = g^{\mu\nu} W_\nu$$

· Todo esto es claro para casos sencillos,

→ ¿Qué pasa con tensores de otro tipo?

Ejemplo : El tensor de Faraday.

Sus componentes son:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

¡Es tipo (0,2)!

¿Cómo obtengo $F^{\mu\nu}$?

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ +E_x & 0 & B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & B_x \\ +E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota : estamos usando $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

Recordemos las ecs. de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 4\pi \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vdots \quad \epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = 4\pi J^i$$

$$\partial_i E^i = 4\pi J^0$$

$$\vdots \quad \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0$$

$$\partial_i B^i = 0$$

con $J^\mu = (J^0, \vec{J})$.

· Estas leyes pueden ser escritas como:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$$

Estas son las ecs. de Maxwell en su forma covariante.

↖ Escrito en términos de tensores.

§ 1.5. Formas Diferenciales

- Una forma diferencial es un tensor tipo $(0, p)$ que es antisimétrico.
- Dado su orden, se les llama p-formas.

Ejemplos:

0-forma $\rightarrow$ Escalar

1-forma $\rightarrow$ Covector

2-forma $\rightarrow$ tensor de Faraday

4-forma $\rightarrow$ $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$

¿Qué significa antisimétrico?

→ Intercambio de índices nos arroja un menos:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma} = -\epsilon_{\nu\mu\sigma}$$

Dada una p -forma y una q -forma, podemos crear una $(p+q)$ -forma con el **wedge product**

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]}$$

Por ejemplo, dos 1o-formas:

$$\begin{aligned} (A \wedge B)_{\mu\nu} &= \frac{2!}{1!1!} A_{[\mu} B_{\nu]} \\ &= 2A_{[\mu} B_{\nu]} \\ &= A_{\mu} B_{\nu} - A_{\nu} B_{\mu}. \end{aligned}$$

donde utilizamos la notación para antisimetrización:

$$T_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]} S^\sigma = \frac{1}{n!} \left(T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} S^\sigma + \text{suma alternante sobre permutaciones de } \mu_1 \dots \mu_n \right).$$

- La derivada exterior "d" nos permite diferenciar p-formas para obtener (p+1)-formas:

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}$$

El caso más simple de esto es el gradiente:

$$(d\phi)_\mu = \partial_\mu \phi.$$

Nota que:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

donde ω y η son p- y q-formas, respectivamente.
¡De tarea!

Ejercicio, calcula:

$$\begin{aligned}\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} &= \frac{1}{3!} \left(\partial_{\mu} F_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} F_{\beta\mu} + \partial_{\beta} F_{\mu\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \partial_{\mu} F_{\beta\alpha} - \partial_{\alpha} F_{\mu\beta} - \partial_{\beta} F_{\alpha\mu} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\partial_{\mu} F_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} F_{\beta\mu} + \partial_{\beta} F_{\mu\alpha} \right)\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos el **operador estrella de Hodge**:

$$(*A)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p}$$

que mapea de p -formas a $(n-p)$ -formas.
Esto mapea A a A^{dual} .

Si aplicamos el dual de Hodge a un producto wedge de dos 1o-formas:

$$*(U \wedge V)_i = \epsilon_i{}^{jk} U_j V_k.$$

¿Qué es esto? ↗