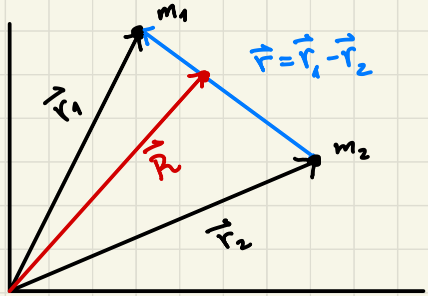
3. Problema de Fuerza Central

- Como primera aplicación de Lagrange, estudiaremos la dinámica de dos cuerpos que interactúan entre sí.
- Ejemplos,
  - ⇝ Planeta orbitando el Sol
  - ⇝ Electrón y protón en el átomo de Hidrógeno.
  - ⇝ Sistema binario de estrellas.

No consideraremos fuerzas externas.

3.1. El problema

- Considera dos partículas de masa m_1 y m_2, con posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.
- El sistema cuenta con seis grados de libertad:



$$\left.\begin{array}{l}\text{Tres para } m_1 \\ \text{Tres para } m_2\end{array}\right\} \rightsquigarrow \vec{r}_1 \text{ y } \vec{r}_2$$

- Aquí, $\vec{R}$ da la posición del centro de masas (CM) y $\vec{r}$ posición relativa.
- Objetivo, escribir el Lagrangiano del sistema.
- La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} . \tag{3.1}$$

- Ahora veamos una forma más conveniente de describir esto.
- Si convenientemente tomamos $\vec{R}$ y $\vec{r}$ como coord. generalizadas, recordando que:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

y

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

- Reescribamos (3.1) en términos de estas coordenadas:

· Porque el público lo pidió:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

$$\hookrightarrow \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1}{M} + \frac{\vec{r}_2 m_2}{M} \quad , \quad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1}{M} + \frac{(-\vec{r} + \vec{r}_1) m_2}{M}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1}{M} - \frac{\vec{r} m_2}{M} + \frac{\vec{r}_1 m_2}{M}$$

$$\vec{R} = \vec{r}_1 \left(\cancel{\frac{m_1 + m_2}{M}}^{\,1} \right) - \vec{r} \frac{m_2}{M}$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r} \frac{m_2}{M} \qquad (3.2a)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r} \frac{m_1}{M} \qquad (3.2b)$$

· Sustituimos en (3.2) en (3.1):

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 \left[\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} \frac{m_2}{M} \right]^2 + m_2 \left[\dot{\vec{R}} - \dot{\vec{r}} \frac{m_1}{M} \right]^2 \right)$$

$$T = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2$$

· Considerando un potencial $V(r)$ entre ambas partículas, el Lagrangiano es:

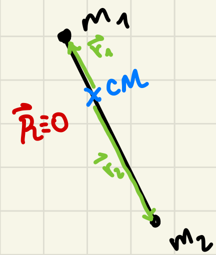
$$L = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) \qquad (3.3)$$

why?
TAREA

· Nota que $\vec{R}$ es cíclica.

→ Centro de masa en reposo o mov. const.

⇝ Trivial, ignorar.



· Ahora definimos la masa reducida:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.4)$$

· Entonces, (3.3) es:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)}$$

· El problema se partió en dos

→ Una partícula libre de masa M.
→ Una partícula μ bajo $V(r)$.

· Si ahora consideramos que

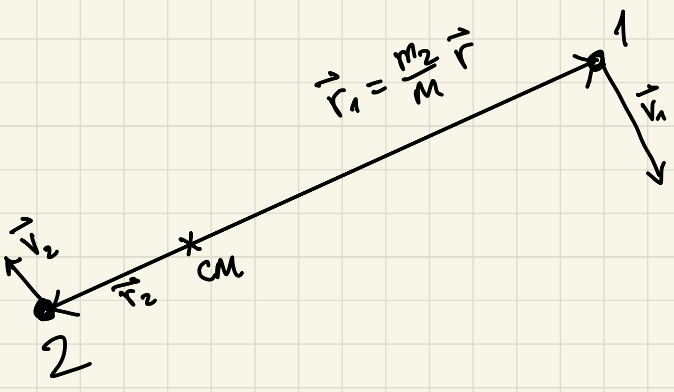
$$\dot{\vec{R}} = \text{const},$$

podemos elegir un marco de referencia donde el CM está en reposo,

$$\dot{\vec{R}} = 0 .$$

· En este CM frame, el Lagrangiano es:

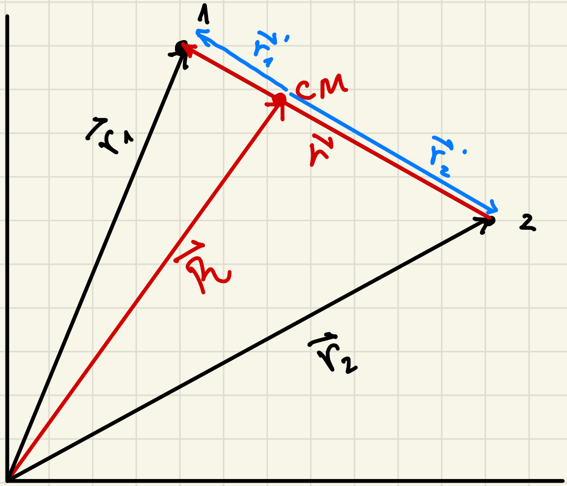
$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r)} \qquad (3.5)$$



<u>Nota</u>: $\vec{r}$ es la posición relativa de la partícula 1 a la 2.

<u>Conclusión</u>: reducimos el problema de dos cuerpos al de uno con una partícula de masa μ bajo el potencial $V(r)$.

(OPCIONAL) · Con un poco más de detalle:



· Tenemos

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

· También podemos definir vectores desde el CM a las partículas:

$$\vec{r}_1{}' \quad y \quad \vec{r}_2{}'$$

· Con esto tendremos las relaciones

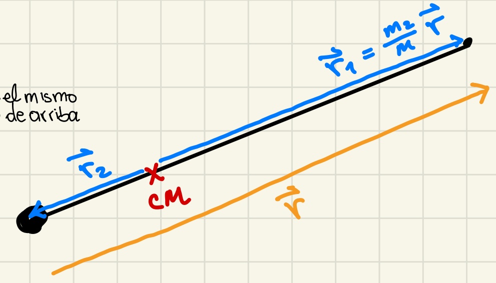
$$\vec{R} + \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1$$
$$\vec{R} + \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2$$

Si las restamos

$$\vec{R} + \vec{r}_1{}' - \vec{R} - \vec{r}_2{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$
$$\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r}$$

¿Qué pasa si vamos al CM? $(\vec{R} \to 0)$

*No es el mismo dibujo de arriba



Aquí coinciden

$$\vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 \quad y \quad \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2$$

con $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

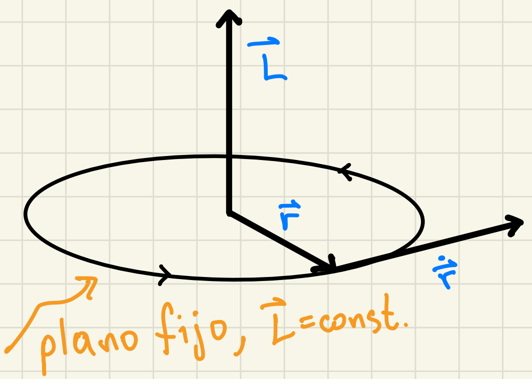
3.2. Ecuaciones de Movimiento

· Dado que el potencial solo depende de r, el sistema tiene simetría esférica:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{M^2}\left(m_2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_1 \vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \boxed{\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}}$$

· Notamos que el vector radial y el momento lineal están en un plano normal a $\vec{L}$



· Escribimos (3.5) en polares:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)} \tag{3.6}$$

→ e.o.m para θ:

· Además, tenemos que (3.6) es cíclico en θ:

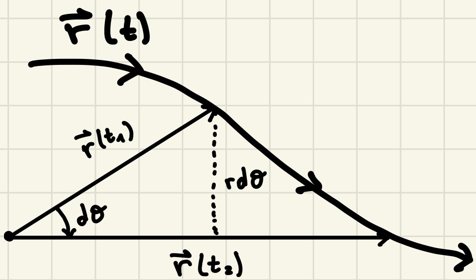
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const}.$$

- Esto es, conservación de momento angular:

$$\boxed{l \equiv \mu\, r^2 \dot{\theta} = \text{const}} \qquad (3.7)$$

- Interpretación geométrica



- El vector $\vec{r}(t)$ barre un área dA en un intervalo dt:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Esto es, la velocidad areal es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$= \frac{l}{2\mu} = \text{const}.$$

$\rightsquigarrow$ Segunda Ley de Kepler

→ e.o.m para r:

- Tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} + \mu r \dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\mu \dot{r}\right) = -\mu \ddot{r}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V(r)}{\partial r} + \mu r \dot{\theta}^2 - \mu \ddot{r} = 0$$

Reacomodando:

$$\boxed{\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} + \mu r \dot{\theta}^2} \qquad (3.8)$$

- El problema de los dos cuerpos se redujo a resolver las ec. (3.7) y (3.8).

- De (3.7):

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2},$$

Sustituimos en (3.8):

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + F_{cf} \qquad (3.9)$$

donde $F_{cf} = \mu r \dot{\theta}^2$.

- La ec. (3.9) es la segunda Ley de Newton para una partícula en una dimensión de masa μ en posición r.

- Dicha partícula esta sujeta a una fuerza:

$$-\frac{\partial V}{\partial r}$$

más una "ficticia" fuerza centrífuga.

⤳ Redujimos el problema a una sola dimensión.

· Conviene reescribir la fuerza ficticia como:

$$F_{cf} = \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

con esto definimos el potencial centrífugo

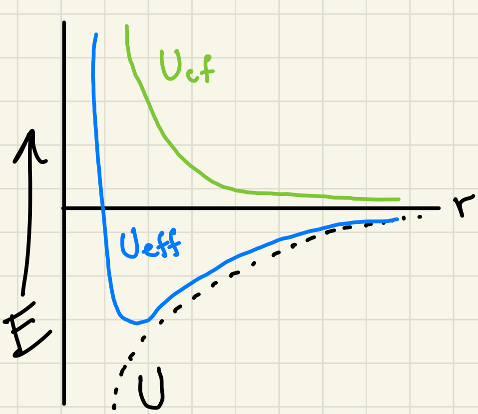
$$F_{cf} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial r} V_{cf}$$

· Regresando a (3.9):

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left[V(r) + V_{cf}(r)\right] = -\frac{d}{dr} V_{eff} \tag{3.10}$$

donde V_{eff} es el potencial efectivo.

<u>Ejemplo</u>: *Cometa.



¿Cómo es el potencial efectivo?

$$U_{eff} = -\frac{G \underset{\text{cometa}}{m_1} \underset{\text{sol}}{m_2}}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

* Cuando <u>r es grande</u>:

- $\ell^2/2\mu r^2$ despreciable, gana la gravit.

  V_{eff} es negativo, fuerza atractiva.

* Cuando <u>r es pequeño</u>:

- Gana $\ell^2/2\mu r^2$.

  V_{eff} es positivo, fuerza repulsiva.

• <u>¿Y las energías?</u>

Primero, modifiquemos (3.10)

$$\left(\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} V_{eff}\right) \dot{r}$$

$$\mu \ddot{r} \dot{r} = -\frac{d}{dr} V_{eff} \, \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt} V_{eff}$$

Esto es,

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{eff} = \text{const} \qquad (3.11)$$

⇝ Conservación de la energía.

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{eff} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 + U(r) \quad (3.12)$$

$$= E.$$

De nuevo, ¡problema uni-dimensional!

Importante: De (3.12)

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V_{eff} \geq 0}$$

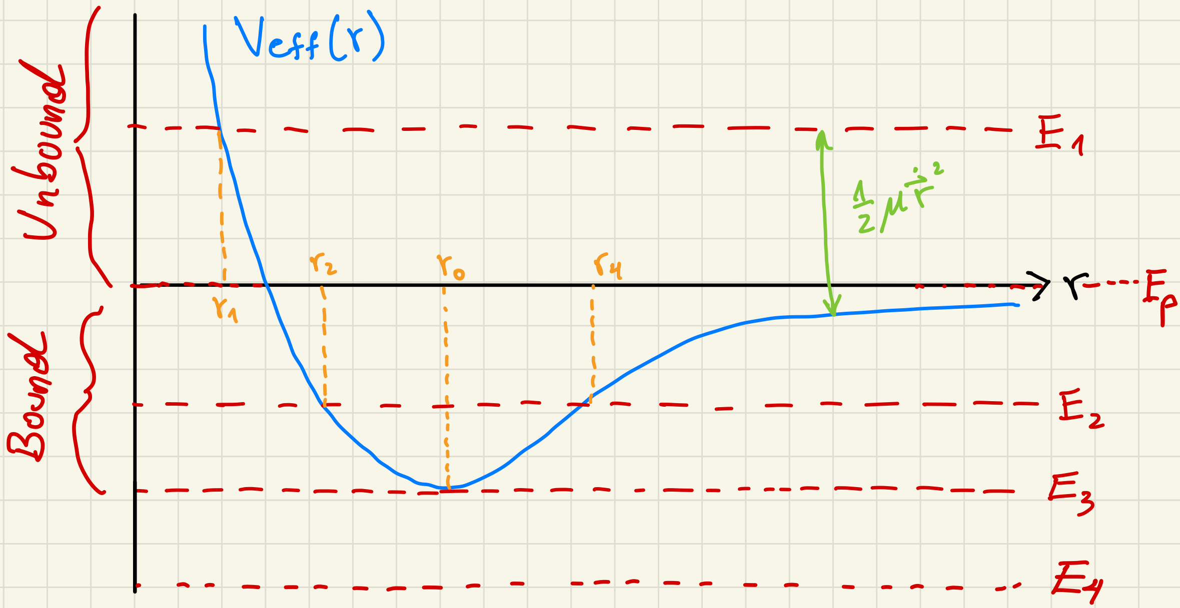
- E es una constante. (Lo mostramos).
- $\frac{1}{2}\mu$ es positivo.
- $\dot{r}$ puede ser negativo, positivo o cero pero $\dot{r}^2$ es positivo!

$$\Rightarrow \boxed{E \geq V_{eff}} \quad (3.13)$$

¿De qué me sirve esto?

→ Veamos cómo se comporta V_{eff}, en el caso

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$



- Primero, ¿Qué pasa con E_4?
  - ⇝ No es físicamente posible

$$\underline{E < V_{eff}} \quad (\dot{r}^2 < 0)$$

- ¿Cuál es el valor mínimo legal de energía?
  - ⇝ En E_3; el mínimo de V_{eff}:

Para el mínimo.

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0} = -\frac{\ell^2}{\mu r_0^3} + \frac{G m_1 m_2}{r_0^2} \overset{!}{=} 0$$

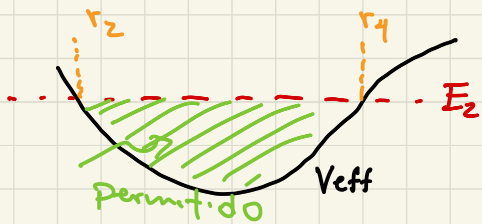
$$\Rightarrow \quad -\frac{\ell^2}{\mu} + G m_1 m_2 r_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{l^2}{\mu G m_1 m_2}}$$

- Solo un valor de r ⇝ <u>r constante</u>

  ⇝ Órbita circular

- <u>¿Qué pasa en E_2?</u>



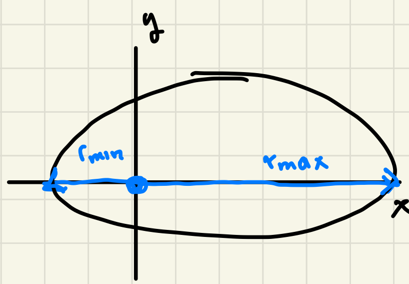
- Notamos que hay una región permitida entre r_2 y r_4 ya que:

$$E_2 > V_{eff}$$

r_2 y r_4 se les llama r_{min} y r_{max}.

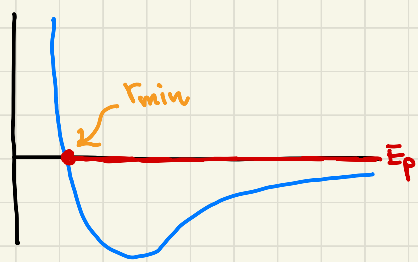
$$\Rightarrow \quad r_{min} \leq r \leq r_{max}$$

⇝ Órbita elíptica

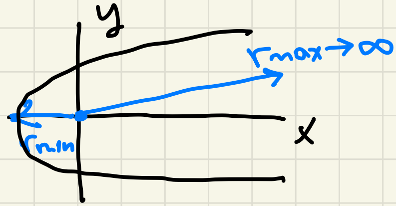


<u>¿Qué pasa con E_p?</u>

- Tenemos un r_{min} finito, pero $r_{max} \to \infty$



→ Órbita parabólica



· Finalmente, para E_1 tenemos una órbita hiperbólica.

3.3. Ecuación de la órbita.

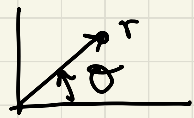
· Queremos resolver (3.10):

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} V_{eff}(r)$$

→ Altamente no lineal.

¿Qué pasa si consideramos la dependencia de r con θ?

"Si me das θ, sabré dónde estará r"



· Truco: usemos $u = \frac{1}{r}$.

Tenemos:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{l}{\mu r^2}$$

$$= -\cancel{\frac{1}{u^2}}\frac{du}{d\theta}\frac{l}{\mu}\cancel{u^2} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

Ahora,

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{l}{\mu}u^2\right)$$

$$= -\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Por último,

$$\frac{d}{dr}V_{eff} = \frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}\right)$$

$$= -\frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$= -\frac{l^2}{\mu}u^3 + Gm_1m_2u^2$$

Ahora sí, (3.10) es:

$$\mu\left(-\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = \frac{l^2}{\mu}u^3 - Gm_1m_2u^2$$

Multiplicamos por $-\frac{\mu}{\ell^2} u^{-2}$:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2}}$$

· Solución general:

$$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2}$$

Sistema coord. con:

$B=0 \Rightarrow r=r_{min}$ para $\theta=0$ (eje x)

$$\rightsquigarrow \quad u = A\cos\theta + \frac{1}{c} \,, \quad c = \frac{\ell^2}{Gm_1m_2\mu}$$

Luego,

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cos\theta + \frac{1}{c}}$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{c}{1+\epsilon\cos\theta}} \qquad (3.14)$$

con $e = cA$ es la excentricidad.

- Esta es la ecuación de las cónicas en su forma polar.