§1.3.1 Review : Vectors and Dual Vectors

- Dada la importancia de los vectores y covectores, haremos un pequeño repaso.

I. **Variedad**: es un espacio que localmente es plano (en nuestro caso, Minkowski).

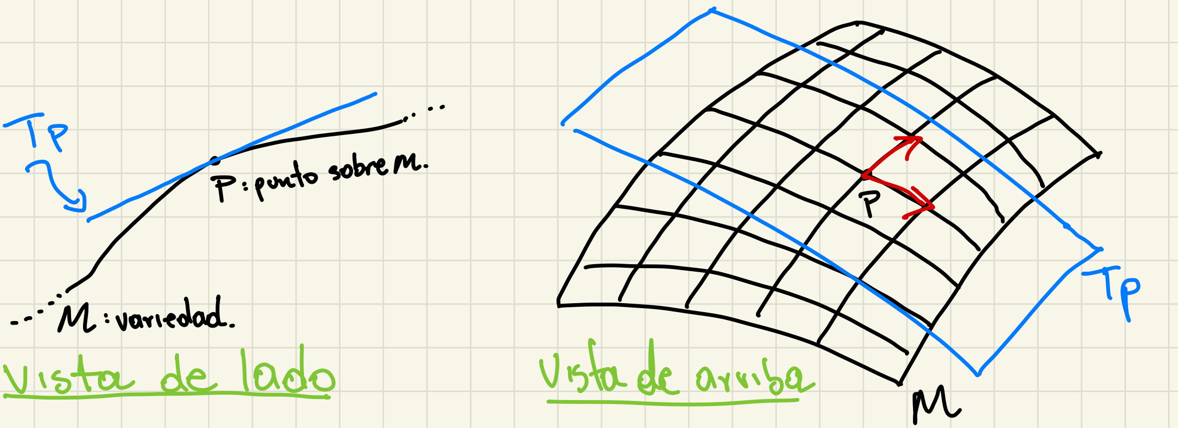
- Geometría global no trivial.

↝ Cúbrelo con parches (Minkowski).

- Cada punto en la variedad es un evento (t, x, y, z).

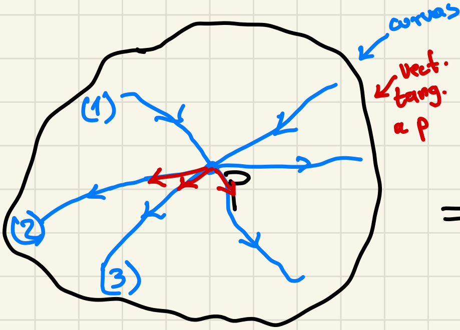
II. **Espacio tangente**: a cada punto en nuestra variedad le asignamos un espacio vectorial: T_p.

- Los vectores de este espacio son tangentes a este punto.



III. Vectores (tangente): son vectores tangente a una curva sobre la variedad.

Imagina que vemos a la variedad desde arriba.



· Hay una infinidad de curvas que pasan sobre el punto p.

$\Rightarrow$ Vectores tangentes a p.

$\rightsquigarrow$ ¡Espacio tangente!

· Una curva $x^\mu(\lambda)$ tiene vector tangente:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

donde λ la parametriza.

IV. Espacio Cotangente: espacio asociado al tangente, de misma dimensión: T_p^*.

· Aquí viven otro tipo de vectores, todos sobre un punto (al igual que T_p).

V. Covectores (uno-formas): son mapeos lineales de vectores a escalares.

· Los covectores "comen" vectores.

Recuerda: $\omega(V) = \omega_\mu V^\mu \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: el gradiente. (Mira clase anterior).

VI. Conexión Vector-Covector:

¿De qué me sirve un covector?

- Imagina estás sobre una colina (variedad).

Vector: posibles direcciones en las que te puedes mover.

Campo escalar: nos da la altura de la colina (elevación).

Covector: Si te mueves, la elevación cambiará.

La taza de cambio en la dirección del vector es lo que mide el covector.

§1.4. Tensores

- La generalización de vectores y covectores se le conoce como tensor.

- Un tensor de tipo (k,l) es un mapeo multilineal de covectores y vectores a $\mathbb{R}$:

$$T = \underbrace{T_p^* \times \ldots \times T_p^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{T_p \times \ldots \times T_p}_{l \text{ veces}} \to \mathbb{R}.$$

donde $\times$ es el producto cartesiano.

- Por ejemplo,

$T_p \times T_p$. espacio de par ordenado de vectores.

$$T_p \times T_p = \{(v,w) \mid v,w \in T_p\}$$

$\rightarrow$ Tensor tipo $(2,0)$.

- Entonces,

$(0,0) \longrightarrow$ Escalar,

$(0,1) \longrightarrow$ Covector (uno forma)

$(1,0) \longrightarrow$ Vector

· Considera un tensor tipo $(1,1)$:

$$T(\underbrace{a\omega+b\eta}_{\text{covector}},\underbrace{cV+dW}_{\text{vector}}) =$$

$$= T(a\omega, cV) + T(b\eta, cV) + T(b\eta, dW) + T(a\omega, dW)$$

$$= ac\,T(\omega,V) + bc\,T(\eta,V) + bd\,T(\eta,W) + ad\,T(\omega,W)$$

Actúa linealmente en cada argumento.

· La pregunta ahora es:

¿Cómo se ve este tensor?

Esto es, ¿Tiene componentes y base?

Por ejemplo, ya conocemos a

$F^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ ¿De dónde salieron?

· El espacio de todos los tensores tipo (k,l) forman un espacio vectorial.

⇝ <u>Necesitamos</u> <u>una</u> <u>base</u>.

Para esto, introducimos el <u>producto tensorial</u> $\otimes$:

Si T es tipo (k,l) y S tipo (m,n), el nuevo tensor tipo $(k+m, l+n)$ es:

$$T\otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)})$$

los $\omega^{(i)}$ y $V^{(i)}$ denotan distintos covectores y vectores, no componentes.

· Con esto construimos la <u>base</u> para nuestro tensor tipo (k,l):

$$\hat{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}$$

Entonces, cualquier vector:

$$\boxed{T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}\, \hat{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}}$$

· Aplicando un tensor a vectores y covectores:

$$T\left(\omega^{(1)},\dots,\omega^{(k)},V^{(1)},\dots,V^{(l)}\right) = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\,\omega^{(1)}_{\mu_1}\cdots\omega^{(k)}_{\mu_k}V^{(1)\nu_1}\cdots V^{(l)\nu_l}$$

Lo siguiente es:

¿Cómo transforma un tensor?

componentes.

· Es simplemente una extensión de como transf. los vectores y covectores:

$$T^{\mu_1'\cdots\mu_k'}{}_{\nu_1'\cdots\nu_l'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\mu_k'}{}_{\mu_k}\Lambda^{\nu_1}{}_{\nu_1'}\cdots\Lambda^{\nu_l}{}_{\nu_l'}\,T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\,.$$

Ejemplo: tensor métrico tipo (0,2)

La acción sobre dos vectores:

$$\eta(V,W) = \eta_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = V\cdot W$$

Recordemos que:

$$\eta_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = \begin{cases} <0\,, & V^{\mu}\ \text{timelike} \\ =0\,, & V^{\mu}\ \text{lightlike} \\ >0\,, & V^{\mu}\ \text{spacelike} \end{cases}$$

¡cono de luz!

· La inversa de la métrica es un tensor tipo $(2,0)$; $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \eta_{\rho\nu}\eta^{\nu\mu} = \delta^{\mu}_{\rho}$$

donde δ^{μ}_{ρ} es la Delta de Kronecker que es el mapeo identidad.

· Otro ejemplo, el símbolo Levi-Civita que es tipo $(0,4)$:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es impar} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Nota: no es un tensor, pero puede definirse como uno.

§ 1.4.1 Operaciones con tensores

· Contracción: tensor $(k,l) \rightarrow (k-1, l-1)$

$$S^{\mu\rho}{}_{\sigma} = T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}$$

Nota: solo contraemos índices arriba y abajo. El orden también importa.

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu}$$

· <u>Subir y bajar índices</u>:

Utilizamos la métrica para esto:

$$T^{\alpha\beta\mu}{}_{\delta} = \eta^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$$

$$T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$$

$$T_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\rho\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\,\eta^{\sigma\delta}$$

· Esto <u>no</u> cambia el orden de los índices.

· También ayuda a pasar de vectores a covectores:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$$

$$\omega^\mu = \eta^{\mu\nu}\omega_\nu \,.$$

Por ejemplo:

$$A^\lambda B_\lambda = \overset{?}{\dots}$$

$$= \eta^{\lambda\alpha} A_\alpha \eta_{\lambda\beta} B^\beta$$

$$= \eta^{\lambda\alpha}\eta_{\lambda\beta} A_\alpha B^\beta$$

$$= \delta^{\alpha}{}_{\beta} A_{\alpha} B^{\beta}$$

$$= A_{\beta} B^{\beta}$$

· Para un tensor tipo $(1,1)$ $X^{\mu}{}_{\nu}$, tenemos que la traza:

$$X = X^{\mu}{}_{\mu}$$

¿Qué pasa con un tensor tipo $(0,2)$?

$$Y = Y^{\lambda}{}_{\lambda} = \eta^{\mu\nu} Y_{\mu\nu}$$

¿Cuánto es la traza de la métrica?

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = \delta^{\mu}{}_{\mu} = 4.$$

¡No es 2!