2. Mecánica Lagrangiana

- ¿Por qué Lagrange?

  ⇝ Independiente de las coordenadas.

  ⇝ Leyes de conservación y simetrías.

  ⇝ Manejo de restricciones.

  ⇝ Dinámica basada en energías.

  ⇝ Elegancia.

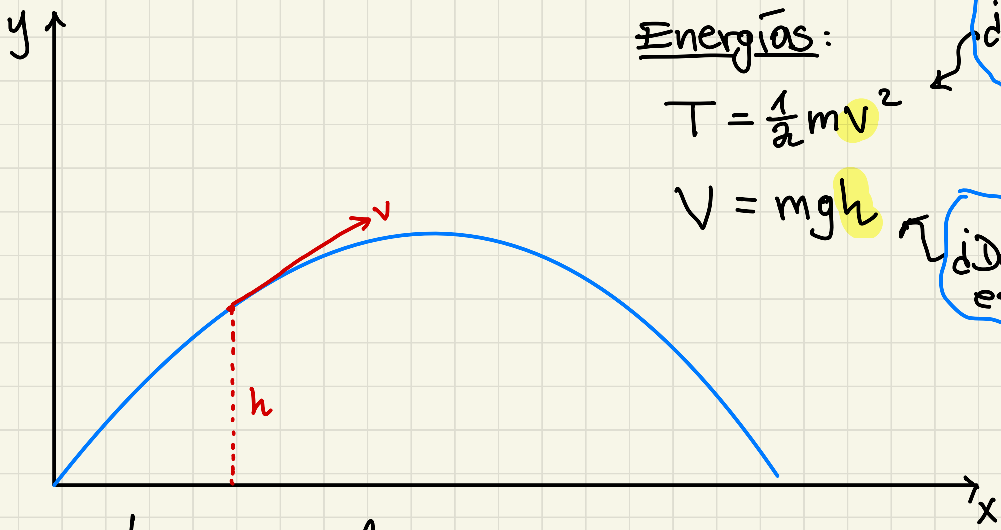
Ahora, una breve introducción (nada rigurosa).

- ¿Qué es el Lagrangiano?

Primero una afirmación:

⇝ Para conocer la trayectoria necesit.:

- Posición
- Velocidad



Energías:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$ ¿Adónde va?

$$V = mgh$$ ¿Dónde está?

- Esto es, solo requerimos:
  - Energía Cinética (T),
  - Energía Potencial (V).
- Motivados por esto, definimos el Lagrangiano:

¡solo energías!

$$L = L(T, V). \tag{2.1}$$

- Si sumamos las energías sobre toda la trayectoria, obtenemos la acción:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(T, V)\, dt. \tag{2.2}$$

Intuitivamente, ¿Qué es todo esto?

- La acción es una medida que la naturaleza intenta minimizar.

← Como un precio a pagar.

Ejemplo,

Si lanzamos una pelota, hay infinitas trayectorias entre A y B, pero sólo una donde el costo es el mínimo.

→ <u>Este es el camino real.</u>

- El Lagrangiano nos dice qué tan "vivo" está nuestro sistema.

¿Porqué?

→ Por su definición:

¡No confundir con energía total $E = T + V$!

$$\boxed{L = T - V.} \tag{2.3}$$

- Esta diferencia captura la dinámica del sistema.

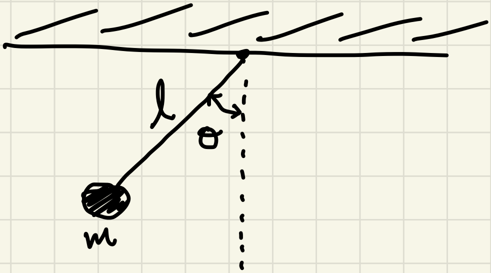
→ Energía Cinética grande, L <u>grande</u>.

→ Energía Potencial grande, L <u>pequeño</u>.

- Si conocemos el Lagrangiano en cada punto, podemos sumarlos y obtener la <u>trayectoria</u>.

· Aterricemos estas definiciones.

· Considera un péndulo simple.



T : qué tan rápido se mueve.

V : su altura.

· El Lagrangiano nos dice como T y V se **compensan** a lo largo del movimiento.

⤳ El péndulo trata de "equilibrar" estas energías.

⤳ Esto **minimiza** la acción.

· Recuerda que, para el péndulo:

$$T = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2,$$

$$V = mgl(1-\cos\theta).$$

Entonces,

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta).$$

Claim : de aquí obtenemos la <u>dinámica</u>.

... ¿Pero cómo?

2.1. Principio de Hamilton

· Es posible obtener las e.o.m considerando el movimiento de un sistema entre un tiempo t_1 y t_2.

Nota: Aquí hablamos de movimiento en el espacio de configuraciones.

¡Muy importante!

El principio de Hamilton describe el movimiento de sistemas monogénicos.

⇝ fuerzas derivables de un potencial que:

$$V = V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad (2.4)$$

· Este principio dice.

"El movimiento del sistema entre t_1 y t_2 es tal que la acción,

$$\boxed{I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt,}$$

donde $L = T - V$, tiene un valor estacionario."

- En pocas palabras, el movimiento es tal que la variación de I para t_1 y t_2 fijos es cero:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)\, dt = 0 \qquad (2.5)$$

¡De aquí salen las e.o.m!

- En resumen, la naturaleza es floja.

- La pregunta es,

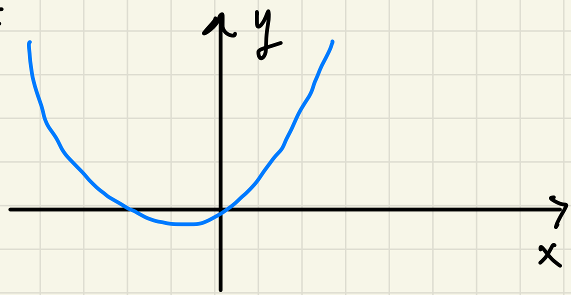
¿Cómo saco las e.o.m?

2.2. Breve introducción a Cálculo de variaciones

- Considera la función $f(x) = 3x^2 + x$. ¿Cuál es su mínimo?

$\rightsquigarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow \underline{x = -1/6}$



· Este método no funciona para funcionales ← funciones de funciones.

i.e., para la acción.

· Recuerda, $I[q(t)]$ "come" trayectorias, no números.

¿Qué hacemos?

Ahorita volvemos a la acción.

· Un mínimo está caracterizado por su vecindad:

⇝ todo está de subida.

¿Y luego?

· Volvamos al ejemplo $f(x) = 3x^2 + x$.

Toma un $x = a$ e investiga sus alrededores.

Esto es,

$$a \rightarrow a + \epsilon$$

donde ϵ es muy pequeño y lo llamamos variación.

· Introducimos esto en $f(x)$:

$$f(a+\epsilon) = 3(a^2+2a\epsilon+\epsilon^2)+a+\epsilon$$

La clave es:

→ Si a es un mínimo, no podemos "bajar" más en cualquier de ϵ.

dirección

Matemáticamente:

"Todos los términos de primer orden en ϵ deben desvanecerse".

Del ejemplo,

$$6a\epsilon + \epsilon \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1/6}$$

Lo mismo de arriba.

· Esto también puede aplicarse a funcionales.

¿La diferencia?

⇝ Buscamos una trayectoria que minimice I, no un punto.

2.3. Euler-Lagrange

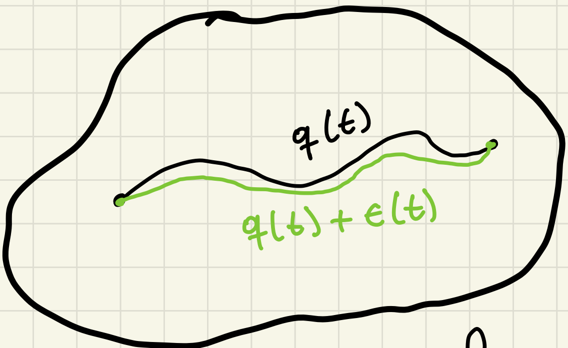
• La acción

$$I[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) dt$$

asigna un número a cada posible camino $q(t)$ entre dos config.

$$q_1(t_1) \, , \, q_2(t_2) .$$

• Objetivo: boscar un $q(t)$ que minimice I!



Espacio de config.

• Comenzamos con un $q(t)$ y una variación $\epsilon(t)$:

$$q(t) \longrightarrow q(t) + \epsilon(t) \qquad (2.6)$$

De nuevo, ϵ es infinit.

• Pero L también depende de $\dot{q}(t)$

$$\rightsquigarrow \quad \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \dot{\epsilon}(t) . \qquad (2.7)$$

- Consideramos variación entre puntos fijos:

$$0 = \epsilon(t_1) = \epsilon(t_2) \qquad (2.8)$$

- Análogo al problema anterior,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\epsilon, \dot{q}+\dot{\epsilon})\,dt \qquad (2.9)$$

→ ϵ debe desvanecerse para encontrar el mínimo.

- Consideremos un Lagrangiano y su exp. de Taylor a <u>primer orden</u>:

$$L = L(q,\dot{q}) + \epsilon\frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dots \qquad (2.10)$$

- En la acción:

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\left(L + \epsilon\frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dt \qquad (2.11)$$

- Ahora buscamos los términos lineales en (2.11)

$$\rightsquigarrow \quad \int_{t_1}^{t_2}\left(\epsilon\frac{\partial L}{\partial q}+\dot{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dt \overset{!}{=} 0 \qquad (2.12)$$

¡Imponemos esto!

· Con esto, encontramos el camino que minimiza I.

¿Ahora qué?

· Integramos por partes el seg. término de (2.12)

$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d\epsilon}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt$$

Pasito escondido.

$$= \epsilon\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\,\epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

De (2.8):

$$\int dt\,\dot{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\int dt\,\epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

· Regresando a (2.12):

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \overset{!}{=} 0 . \qquad (2.13)$$

· Dado que (2.13) es cierto para todo ϵ:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0} \qquad (2.14)$$

Estas son las ecuaciones de
Euler - Lagrange.

· Con un L dado, podemos obtener las e.o.m.

· Importante: Se tiene que usar (2.14) para cada coord. generalizada.