

4.2. Teorema de Wick

- Desde ahora, solo trabajaremos en la interaction picture.

Notación:

$$\phi_I(x) \longrightarrow \phi(x)$$

- Nos interesa calcular cosas tipo:

$$\langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n) S) | 0 \rangle$$

en teoría de perturbaciones a cierto orden en λ .

Ejemplo: λ^2

$$\frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4!} \right)^n \int d^4 y_1 \dots d^4 y_n \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi^4(y_1) \dots \phi^4(y_n) \} | 0 \rangle$$

save for later.

$\leadsto$ Muy difícil

- Ya sabemos que $\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle$ es el prop. de Feynman.

Recordemos el normal-ordering:

→ op. de creación a la izquierda,
op. de aniquilación a la derecha.

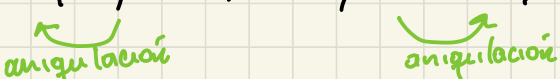
Tenemos $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$

$$\begin{aligned} :\phi^+(x)\phi^-(y): &= \phi^-(y)\phi^+(x) \\ &= :\phi^-(y)\phi^+(x): \end{aligned}$$

El teorema de Wick expresa productos time-ordered en términos de normal-ordered.

→ ayuda a calcular

$$\langle 0 | : \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) : | 0 \rangle$$



Considera dos campos

Para $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned} T(\phi(x)\phi(y)) &= \phi(x)\phi(y) \\ &= (\phi^+(x) + \phi^-(x))(\phi^+(y) + \phi^-(y)) \end{aligned}$$

Nota que ya no están
los signos +, -.

$$\begin{aligned} &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\ &+ \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) \\ &+ [\phi^+(x), \phi^-(y)] \end{aligned}$$

$$= :\phi(x)\phi(y): + [\phi^+(x), \phi^-(y)]$$

Similarmemente para $y^0 > x^0$

$$T(\phi(x)\phi(y)) = :\phi(x)\phi(y): + [\phi^+(y), \phi^-(x)]$$

• Todo junto:

$$T\phi(x)\phi(y) = :\phi(x)\phi(y): + \mathcal{D}_F(x-y)$$

dado que:

$$\mathcal{D}_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) [\phi^+(x), \phi^-(y)] + \Theta(y^0 - x^0) [\phi^+(y), \phi^-(x)]$$

• Usaremos la notación para las contracciones

$$\overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} = \phi(x_1)\phi(x_2) \equiv \underbrace{\mathcal{D}_F(x_1 - x_2)}$$

Entonces,

$$T\phi(x_1)\phi(x_2) = :\phi(x_1)\phi(x_2): + \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}$$

y en general:

$$T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n) = :\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): + \left(\text{suma de todas las contracciones} \right)$$

Ejemplo, $\phi_1 \equiv \phi(x_1)$:

$$\begin{aligned} T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 &= :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: + \overbrace{\phi_1\phi_2}:\phi_3\phi_4: \\ &\quad + \overbrace{\phi_1\phi_3}:\phi_2\phi_4: + \overbrace{\phi_1\phi_4}:\phi_2\phi_3: \\ &\quad + \overbrace{\phi_2\phi_3}:\phi_1\phi_4: + \overbrace{\phi_2\phi_4}:\phi_1\phi_3: \\ &\quad + \overbrace{\phi_3\phi_4}:\phi_1\phi_2: + \overbrace{\phi_1\phi_2}\overbrace{\phi_3\phi_4} \\ &\quad + \overbrace{\phi_1\phi_3}\overbrace{\phi_2\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_4}\overbrace{\phi_2\phi_3} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

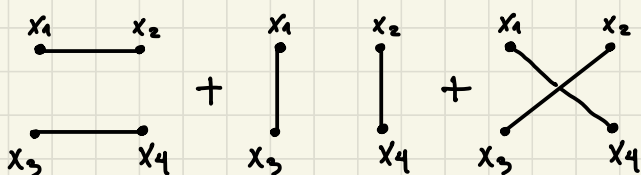
$$\begin{aligned} \langle 0 | T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 | 0 \rangle &= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) \\ &\quad + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) \\ &\quad + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3). \end{aligned}$$

· Esto tiene una representación gráfica:

· $x_1, \dots, x_n$ son puntos

· Cada propagador es una línea que los une.

Ejemplo:

$$\langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle =$$


Estos son los diagramas de Feynman.

4.3. Diagramas de Feynman

· Aplicaremos el teorema de Wick a

$$\langle 0 | T (\phi(x_1) \dots \phi(x_n) S) | 0 \rangle$$

Esto es

$$\frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4!} \right)^n \int d^4 y_1 \dots d^4 y_n \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi^4(y_1) \dots \phi^4(y_n) \} | 0 \rangle$$

Ejemplos

(i) $m=4, n=1$

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^4(x) | 0 \rangle$$

$$\stackrel{\text{Wick}}{=} -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x)$$

+ 23 permutaciones

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x)$$

+ 11 permutaciones

+ 5 similares (x 12 permutaciones)

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x)$$

+ 2 permut.

+ 2 sim. (x 3 permut.)

Diagramas de Feynman:

$$= \text{Diagram 1} + \left(\text{Diagram 2} + 5 \text{ similares} \right)$$

$$+ \text{Diagram 3} + 2 \text{ similares.}$$

$$= -i\lambda \int d^4x \mathcal{D}_F(x_1-x) \mathcal{D}_F(x_2-x) \cdot \mathcal{D}_F(x_3-x) \mathcal{D}_F(x_4-x)$$

$$- \frac{i\lambda}{2} \mathcal{D}_F(x_1-x_2) \int d^4x \mathcal{D}_F(x_3-x) \mathcal{D}_F(x_4-x) \mathcal{D}_F(x-x) + 5 \text{ simi.}$$

$$- \frac{i\lambda}{8} \mathcal{D}_F(x_1-x_2) \mathcal{D}_F(x_3-x_4) \int d^4x \mathcal{D}_F^2(x-x) + 2 \text{ simi.}$$

nota: $\mathcal{D}_F(x-x) = \mathcal{D}_F(0)$ diverge.

(ii) $m=0, n=1$

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T \phi^4(x) | 0 \rangle$$

$$= -\frac{i\lambda}{8} \mathcal{D}_F(0)^2 \int d^4x = \text{diagram of a tadpole with a loop} \cdot x$$

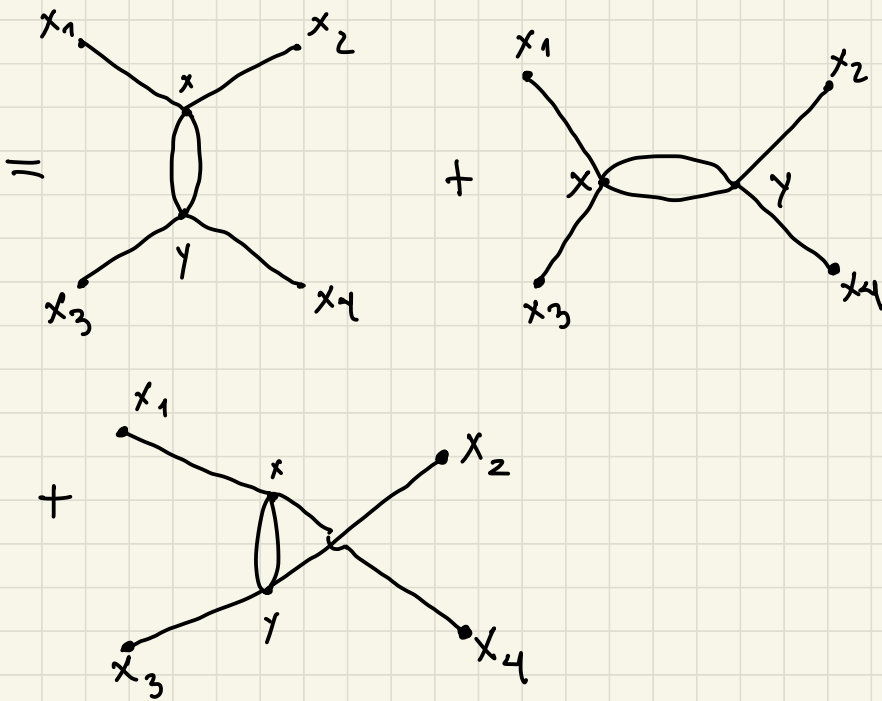
(iii) $m=4, n=2$

$$\frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^4(x) \phi^4(y) | 0 \rangle$$

→ muchas contracciones; las completamente conectadas son del tipo:

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \overbrace{\phi_y \phi_y \phi_y \phi_y}$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_F(x_1-x) \mathcal{D}_F(x_2-x) \mathcal{D}_F(x_3-y) \mathcal{D}_F(x_4-y) \cdot \mathcal{D}_F(x-y)^2 + 2 \text{ simi}$$



4.4. Reglas de Feynman

Tenemos,

$$\langle 0 | T \phi_1 \dots \phi_m \exp\left(-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x)\right) | 0 \rangle$$

= suma de todos los diagramas de Feynman con m puntos externos.

Cada diagrama:

- propagadores
- vertices (n)
- puntos externos (m)

• Su expresión analítica:

- Cada propagador $y \xrightarrow{\quad} z$ $D_F(y-z)$
- Cada vértice $x \cdot -i\lambda \int d^4x$
- Cada punto externo $x_k \text{ --- } 1$

→ Reglas de Feynman en espacio de posiciones

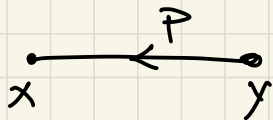
• Dado que

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

es más útil escribir las reglas de Feynman en espacio de momentos.

¿Cómo?

Asignamos momento p a cada propagador.

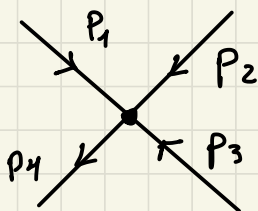


(dirección arbitraria)

Asigna

$$\begin{array}{l} e^{ip_y} \text{ a un v\u00e9rtice y (saliendo)} \\ e^{-ip_x} \text{ a un v\u00e9rtice x (entrando)} \end{array} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$
$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \text{ a la l\u00ednea}$$

En el v\u00e9rtice tenemos



$$= -i\lambda \int d^4 x e^{-i(p_1 + p_2 + p_3)x + ip_4 x}$$

$$= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4)$$

! Conservaci\u00f3n de momento en el v\u00e9rtice!

Reglas de Feynman en espacio de momentos.

(i) propagadores $\xleftarrow{p} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

(ii) Vértices $\times -i\lambda$

(iii) puntos externos $x_k \xleftarrow{p} e^{-ipx_k}$

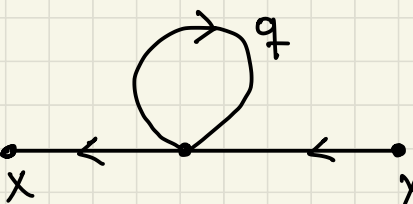
$x_j \xrightarrow{p} e^{ipx_j}$

(iv) Imponer conservación de momento en cada vértice

(v) Integra sobre cada momento indeterminado. $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

(vi) Divide entre el factor de simetría (?)
investigar

Ejemplo:



$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \cdot \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

* Addendum

29.05.2017

Scattering Amplitudes

$|i\rangle$: initial (multi-particle) state for $t \rightarrow -\infty$

$|f\rangle$: final " state for $t \rightarrow +\infty$

• time-evolution of initial state:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, -\infty) |i\rangle = S |i\rangle$$

• probability that $|i\rangle$ evolves into $|f\rangle$ is prop. to "S-matrix element" (squared)

$$|\langle f | S | i \rangle|^2 = |S_{fi}|^2$$

• the non-trivial part of the S-matrix is the

• T-matrix:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) T_{fi}$$

T_{fi} measures genuine scattering from $|i\rangle$ to $|f\rangle$

• How are we going to calculate correlation fns. in the interaction picture, i.e.

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle$$

Lo que vimos en clase.

• $|\Omega\rangle$ vacuum of theory.