

Unidad 4. Interacción de Campos

• Hasta ahora tenemos:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \text{spin } 0$$

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad \text{spin } 1/2$$

también tenemos

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

para campos vectoriales no-masivos (spin 1).

→ Cuantización de **fotones**.

• Estos Lagrangianos tienen en común:

→ cuadráticos

→ cuantización exacta

→ descomposición en modos de Fourier

Para tener interacción, necesitamos agregar términos de mayor orden.

(1) Scalar ϕ^4 theory

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

con $\lambda > 0$. e.o.m.:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3}\phi^3$$

$\rightarrow$ no es lineal

$\rightarrow$ no se puede resolver por descomp. de Fourier.

(2) Yukawa theory

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} - g \bar{\psi} \psi \phi$$

Sirve para describir las fuerzas nucleares.
También para el Mecanismo de Higgs.

(3) Quantum Electrodynamics (QED)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_D - e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

describe electrones y fotones.

• ¿Por qué estos ejemplos?

→ Criterio de **renormalización**.

• Nota las dimensiones de los campos:

$$[S] = 1 \rightarrow [\mathcal{L}] = [M]^4$$

entonces, $[\phi] = [M]^1$

$$[\psi] = [M]^{3/2}$$

$$[A_\mu] = [M]^1.$$

• En los ejemplos de arriba, las constantes de acoplamiento son **adimensionales**.

• Nota que pudimos agregar $-\frac{\mu}{3!}\phi^3$
con

$$[\mu] = [m]^1.$$

→ todos estos generan interacciones renormalizables.

• Términos con altas dimensiones requieren acoplamientos con dimensión de masa negativa

Ejemplo,

$$G \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi. \quad [G] = [m]^{-2}$$

Estas son interacciones no renormalizables.

→ trae problemas.

4.1. Teoría de Perturbaciones

• Considera la teoría ϕ^4 , $\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4!}\phi^4$,
con Hamiltoniano.

$$H = H_0 + H_{int}$$

donde

$$H_0 = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\}$$

$$H_{\text{int}} = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}} = - \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi^4(x)$$

• Interaction picture : evoluciona operadores usando H_0 .

$$\phi_{\text{I}}(x) = e^{iH_0 t} \phi(\vec{x}) e^{-iH_0 t}$$

obedece $(\partial^2 + m^2) \phi_{\text{I}} = 0$,

con solución :

$$\phi_{\text{I}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}^{\text{I}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{\text{I} \dagger} e^{ipx} \right)$$

con $[a_{\vec{p}}^{\text{I}}, a_{\vec{p}'}^{\text{I} \dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$, etc.

• Aquí también tenemos $a_{\vec{p}}^{\text{I}} |0\rangle = 0$.

vacío de la teoría libre

• Es posible mostrar que

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi_I\rangle = H_I(t) |\phi_I\rangle$$

con

$$H_I = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi_I^4(x).$$

Nota que H_I se obtiene de H_{int} con

$$H_I \equiv e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iH_0 t}.$$

Tenemos que la evolución de $|\phi_I(t)\rangle$:

$$|\phi_I(t)\rangle = U(t, t_0) |\phi_I(t_0)\rangle$$

Finalmente, tenemos que resolver.

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0)$$

$$\text{con } U(t_0, t_0) = 1.$$

Se puede mostrar que la solución es:

← TAREA

$$U(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right\}$$

donde T es time-ordering.

Interesante para scattering:

→ transición al estado asintótico con $t \rightarrow \infty$.

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t, -t) = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right\}$$

$$\phi^4 = T \exp \left\{ -i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right\}$$

Teoría de perturbaciones:

"Constante de acoplamiento pequeña,
→ expandir S a un orden finito en λ ."