3.2. La Representación Espinorial

- Busquemos otra representación del grupo de Lorentz; la espinorial.
- Comenzamos con el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_{4\times4}$$

donde γ^μ son matrices. Esto es, debemos encontrar cuatro matrices con

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad , \mu \neq \nu$$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad , \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad .$$

- Esto se cumple con matrices de 4×4. Por ejemplo,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2\times2} \\ \mathbb{1}_{2\times2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son las matrices de Pauli que satisfacen

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}.$$

¿Qué tiene que ver el álgebra de Clifford con el grupo de Lorentz?

· Considera

$$S^{\rho\sigma} = \frac{1}{4}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}$$

Tenemos que:

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu}$$

y cumplen el álgebra de Lorentz

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = S^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - S^{\nu\sigma}\eta^{\rho\mu} + S^{\rho\mu}\eta^{\nu\sigma} - S^{\rho\nu}\eta^{\sigma\mu}.$$

· Hasta ahora,

→ $S^{\mu\nu}$ son matrices de 4x4.
→ $S^{\mu\nu}$ cumple el álgebra de Lorentz.

- Ahora, necesitamos un campo sobre el cual S actúe.

  ⇝ Espinor de Dirac $\psi^{\alpha}(x)$

- Bajo una transf. de Lorentz

$$\psi^{\alpha}(x) \longrightarrow S[\Lambda]^{\alpha}{}_{\beta}\, \psi^{\beta}(\Lambda^{-1}x)$$

donde

$$\Lambda = \exp\left(\tfrac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}\right)$$
$$S[\Lambda] = \exp\left(\tfrac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right)$$

- Nota:
  - Distintos generadores $M^{\rho\sigma}$ y $S^{\rho\sigma}$, mismos $\Omega_{\rho\sigma}$

    ⇝ Misma transf. de Lorentz sobre x y ψ.
  - $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ y $S[\Lambda]^{\alpha}{}_{\beta}$ se parecen, pero no son lo mismo.

- Veamos las diferencias entre estas representaciones.

· Una rotación está dada por

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}}_{SU(2)\text{ algebra.}}$$

· Si escribimos los parámetros de rotación como

$$\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\varphi^k, \quad (\text{e.g. } \Omega_{12} = -\varphi^3)$$

tenemos que

$$S[\Lambda] = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix}$$

· Si consideramos una rotación de 2π en el eje x^3

$$\rightsquigarrow \vec{\varphi} = (0,0,2\pi)$$

· La matriz de rotación espinorial es:

$$S[\Lambda] = \begin{pmatrix} e^{i\pi\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\sigma^3} \end{pmatrix} = -1$$

· Por lo tanto, si rotamos un espinor por 2π :

$$\psi^{\alpha}(x) \longrightarrow -\psi^{\alpha}(x),$$

¡contrario a lo que le pasa a un vector!

· Si hacemos lo mismo para un vector tenemos

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & -\varphi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = 1.$$

Conclusión : $S[\Lambda]$ es una representación distinta a $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$.

3.3. La Ecuación de Dirac.

· De Mecánica Cuántica tenemos que la ec. de KG tiene algunos problemas para describir al electrón relativista.

- Energías negativas.

- Densidades de prob. negativas.
- Espín (electrón : 1/2).

· Por esto, Dirac propuso una ecuación relativista que respeta Lorentz.

· La condición

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$$

hace que KG sea de segundo orden en espacio y tiempo ; Dirac buscó una de primer orden.

$$\hat{E}\psi = (\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta m)\psi$$

en términos de los operadores $\hat{E}$ y $\hat{p}$ es :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\alpha_x\partial_x - i\alpha_y\partial_y - i\alpha_z\partial_z + \beta m\right)\psi \quad (*)$$

· Nuestra tarea : encontrar $\vec{\alpha}$ y β.

· Si representan partículas relativistas, debe satisfacer KG.

· Si elevamos al cuadrado (*):

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(i\alpha_x\partial_x + i\alpha_y\partial_y + i\alpha_z\partial_z - \beta m\right)\cdot$$
$$\left(i\alpha_x\partial_x + i\alpha_y\partial_y + i\alpha_z\partial_z - \beta m\right)\psi$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \alpha_x^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha_y^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha_z^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \beta^2 m^2\psi$$
$$+\left(\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \left(\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}$$
$$+\left(\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}$$
$$+i\left(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x\right)m\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\left(\alpha_y\beta + \beta\alpha_y\right)m\,\frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$+i\left(\alpha_z\beta + \beta\alpha_z\right)m\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\,.$$

· Para que se reduzca a la ec. de KG,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - m^2\psi$$

Los coeficientes $\vec{\alpha}$ y β deben cumplir

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \\ &\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \\ &\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \quad (j \neq k). \end{aligned}}$$

- Nota que las relaciones de anticonmutación no se cumplen para números.

  ⇝ Tienen que ser matrices

- Del requerimiento $\beta^2 = \mathbb{1}$ y $\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i$ junto con la prop. cíclica de la traza:

$$\begin{aligned} Tr(\alpha_i) = Tr(\alpha_i \beta\beta) &= Tr(\beta \alpha_i \beta) \\ &= -Tr(\alpha_i \beta \beta) \\ &= -Tr(\alpha_i) \end{aligned}$$

⇝ α_i y β tienen traza cero.

- También se puede mostrar que tienen eigenvalores $+1, -1$.

⇒ Tienen que ser de dimensión par. $d = 2, 4, 6, \ldots$

De Tarea

Finalmente, dado que el Hamiltoniano

$$H_D = (\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m)$$

debe tener eigenvalores reales (Hermitiano):

$$\alpha_x = \alpha_x^{\dagger}, \quad \alpha_y = \alpha_y^{\dagger}, \quad \alpha_z = \alpha_z^{\dagger} \quad y \quad \beta = \beta^{\dagger}.$$

· Esto significa que $\vec{\alpha}$ y β:

- Cuatro matrices,
- Anticonmutan,
- Hermitianas,
- Dimensión par y
- Traza cero.

· Dado que solo hay tres matrices de 2×2 que cumplen esto,

$\rightsquigarrow$ $\vec{\alpha}$ y β son matrices de 4×4

· Por lo tanto, el Hamiltanio de Dirac es un operador de 4×4 que actúa sobre una función de onda de cuatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

$a + bi$
números complejos.

Este es el espinor de Dirac.

· Nota que esta es una función de onda, no un campo.

· Después veremos cómo extenderlo a una teoría cuántica de campos.