

¿Qué sucede si consideramos el conmutador de dos deriv. covariantes?

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\sigma = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\sigma - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\sigma.$$

Reduciendo:

$$= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2 \underbrace{\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\sigma}_{\text{tensor torsión}}$$

• Escribimos:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\sigma = \underbrace{R_{\sigma\mu\nu}^\sigma}_{\text{Riemann}} V^\sigma - \underbrace{T_{\mu\nu}^\lambda}_{\text{torsión}} \nabla_\lambda V^\sigma$$

donde el tensor de Riemann se define como

$$R_{\sigma\mu\nu}^\sigma = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

¿Por qué hacemos esto?

→ El conmutador mide la diferencia entre transportar al vector en cierto orden, y su camino opuesto.

Más en la tarea.

Nota :

- El tensor de Riemann está compuesto de elementos no tensoriales.
- Es antisimétrico en sus últimos dos índices (why?).
- Depende de la conexión. No mencionamos si es o no metric compatible o torsion-free.

De forma general :

$$\begin{aligned} [\nabla_\beta, \nabla_\sigma] X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell} &= -T^\lambda_{\beta\sigma} \nabla_\lambda X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell} \\ &+ R^{\mu_1}_{\lambda\sigma\beta} X^{\lambda\mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell} + R^{\mu_2}_{\lambda\sigma\beta} X^{\mu_1\lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell} + \dots \\ &- R^\lambda_{\nu_1\sigma\beta} X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_\ell} - R^\lambda_{\nu_2\sigma\beta} X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1\lambda \dots \nu_\ell} - \dots \end{aligned}$$

La acción del Riemann se puede escribir como :

$$\begin{aligned} R^\sigma_{\sigma\mu\nu} X^\mu Y^\nu Z^\sigma &= X^\lambda \nabla_\lambda (Y^\eta \nabla_\eta Z^\sigma) - Y^\lambda \nabla_\lambda (X^\eta \nabla_\eta Z^\sigma) \\ &- (X^\lambda \partial_\lambda Y^\eta - Y^\lambda \partial_\lambda X^\eta) \nabla_\eta Z^\sigma. \end{aligned}$$

· Recordemos :

"El espacio Euclidiano o Minkowskiano es plano"

Pero, ¿Por qué?

- Si existe un sistema coordenado donde la métrica* es constante, el tensor de Riemann es cero.

*sus componentes.

Esto es, si $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0, \quad \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$$

$$\text{y } \boxed{R^\sigma_{\sigma\mu\nu} = 0}.$$

· Dado que es un tensor, es válido para todos los sistemas coordenados.

Propiedades

· Si tomamos $R_{\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$

se puede mostrar que :

$$R_{\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\nu\mu},$$

$$R_{\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\nu\mu},$$

$$R_{\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma}.$$

También tenemos que:

$$R_{\sigma\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma} + R_{\sigma\nu\mu} = 0,$$

y con esto

$$\nabla_{[\alpha} R_{\sigma]\mu\nu} = 0 \quad \text{Identidad de Bianchi.}$$

• El Riemann tiene cuatro índices.

→ Complicado de manejar.

• Descomponámoslo en varias partes fáciles de manejar.

Podemos:

- Contraer índices
- Simetrizar / Antisimetrizar

Por ejemplo, un tensor $(0,2)$ $X_{\mu\nu}$:

$$X_{\mu\nu} = X_{(\mu\nu)} + X_{[\mu\nu]}$$

y la parte simétrica se puede descomponer en

traza + trace-free

$$X = g^{mn} X_{(mn)} \quad , \quad \hat{X}_{mn} = X_{(mn)} - \frac{1}{n} X g_{mn}$$

tal que:

$$X_{mn} = \frac{1}{n} X g_{mn} + \hat{X}_{mn} + X_{[mn]}$$

• Para casos más complicados esto no es tan trivial.

• Para el tensor de Riemann tomamos la sig. contracción

$$R_{mn} = R^2_{m \ 2 \ n}$$

Tensor de Ricci

¿Por qué ese índice?

Los otros son cero o equivalentes.

• Como consecuencia del Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

• La traza del tensor de Ricci es :

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Escalar de Ricci o de curvatura.

• El tensor y escalar de Ricci contienen la traza del Riemann.

¿Y los términos trace-free?

→ Están en el tensor de Weyl

$$C_{\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\mu\nu} - \frac{2}{n-2} \left(g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\tau} - g_{\tau[\mu} R_{\nu]\sigma} \right) \\ + \frac{2}{(n-1)(n-2)} g_{\sigma[\mu} g_{\nu]\tau} R.$$

Y ya no veremos al Weyl (wer weis?)

Si contraemos dos veces la identidad de Bianchi:

$$0 = g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\lambda\sigma\nu})$$

$$= \nabla^\mu R_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma R + \nabla^\nu R_{\sigma\nu}$$

¿cómo? (*)

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^\mu R_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\sigma R}$$

$$(*) \quad g^{\mu\lambda} \nabla_\sigma R^\nu_{\lambda\mu} = -g^{\mu\lambda} \nabla_\sigma R^\nu_{\lambda\mu} \quad (-1)$$

$$= -g^{\mu\lambda} \nabla_\sigma R_{\lambda\mu}$$

$$= -g^{\lambda\mu} \nabla_\sigma R_{\lambda\mu}$$

$$= -\nabla_\sigma R \quad \checkmark$$

Definimos el **tensor de Einstein**:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}$$

Muy importante
más adelante.

• Encontraremos el escalar de Ricci de la sig. métrica:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Tenemos: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$, $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2} \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$

• Los Christoffel:

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot\theta$$

• El Riemann: $R_{\phi\theta\phi}^{\theta} = \sin^2\theta$ (sí, hay talocha de por medio).

• El Ricci:

$$R_{\theta\theta} = g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} = 1$$

$$R_{\theta\phi} = 0$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta$$

• El escalar de curvatura:

$$R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{2}{a^2}$$