

Unidad 3. El Campo Espinorial

3.1. El Grupo de Lorentz

· Recordemos: Las leyes de la naturaleza son relativistas.

→ Objetivo: Crear una teoría de campos invariante a transf. de Lorentz.

Esto es:

$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

donde Λ^μ_ν satisfacen

$$\Lambda^\mu_\sigma \eta^{\sigma\tau} \Lambda^\nu_\tau = \eta^{\mu\nu}.$$

· Por ejemplo, una rotación Θ en el eje x^3 ,
y un boost v en el eje x^1

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

- Estas transformaciones forman un grupo de Lie. Más sobre esto en un futuro curso (maybe).
- Además, estas transformaciones tienen una representación sobre los campos.

↳ Concepto de Teoría de Grupos.

In short:

"Para cada transf. de Lorentz, hay matrices que, aplicadas al campo, producen campos que transf. bajo Lorentz".

- Ejemplo, el campo escalar
Bajo $x \rightarrow \Lambda x$, tenemos

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

- Esto es una transformación activa, por eso el Λ^{-1} .

↑ ¿Por qué?
Tarea.

- Invariancia de Lorentz:

Si $\phi(x)$ resuelve las e.o.m, entonces $\phi(\Lambda^{-1}x)$ también.

• Para KG, $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$.

Su derivada,

$$(\partial_\mu \phi)(x) \rightarrow (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (\partial_\nu \phi)(y)$$

con $y = \Lambda^{-1}x$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{deriv}}(x) &= \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) \eta^{\mu\nu} \\ &\rightarrow (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\partial_\rho \phi)(y) (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu (\partial_\sigma \phi)(y) \eta^{\mu\nu} \\ &= (\partial_\rho \phi)(y) (\partial_\sigma \phi)(y) \eta^{\rho\sigma} \\ &= \mathcal{L}_{\text{deriv}}(y). \end{aligned}$$

• La parte del potencial $\phi^2(x) \rightarrow \phi^2(y)$.

• La acción completa:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \mathcal{L}(x) &\rightarrow \int d^4x \mathcal{L}(y) \\ &= \int d^4y \mathcal{L}(y) = S \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ invar. de Lorentz!

• En general, un campo puede transformarse como:

$$\phi^a(x) \rightarrow D[\Lambda]^a_b \phi^b(\Lambda^{-1}x)$$

donde las matrices $D[\Lambda]$ forman una representación del grupo de Lorentz.

$$\leadsto \text{i.e.}, D[\Lambda_1] D[\Lambda_2] = D[\Lambda_1 \Lambda_2]$$

$$D[\Lambda^{-1}] = D[\Lambda]^{-1}.$$

Pregunta: ¿Cómo encontramos estas representaciones?

$\leadsto$ Transf. infinitesimales.

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$$

para ω infinitesimal. Dado que

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0.$$

¡Antisimétrico!

• Una base para estas matrices :

$$(M^{\sigma\tau})^\mu{}_\nu = \eta^{\sigma\mu} g^\tau_\nu - \eta^{\tau\mu} g^\sigma_\nu$$

¿Qué es esto?

→ Estas matrices dictarán cómo hacemos las transf. de Lorentz

$$(M^{01})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Boost en } x^1$$

$$(M^{12})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rotación en el plano } (x^1, x^2).$$

• En pocas palabras, "generan" los boosts y rotaciones.

• Obedecen el álgebra de Lie.

$$\begin{aligned} [M^{\sigma\tau}, M^{\tau\nu}] &= \eta^{\sigma\tau} M^{\sigma\nu} - \eta^{\sigma\nu} M^{\sigma\tau} \\ &+ \eta^{\sigma\nu} M^{\sigma\tau} - \eta^{\tau\nu} M^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

• Finalmente, escribimos ω^μ como

$$\omega^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \Omega_{\sigma\tau} (M^{\sigma\tau})^\mu{}_\nu$$

y una transf. de Lorentz

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2} \Omega_{\sigma\tau} M^{\sigma\tau}\right)$$

$\Omega_{\sigma\tau}$ son números. Nos dicen por cuánto rotamos Θ , o velocidades para los boosts.