# 2.4. Geodésicas

- Una geodésica es la generalización de la línea recta a espacios curvos.
- Sabemos que:
  - Línea recta: el camino más corto entre dos puntos.

    O, un camino que transporta paralelamente su vector tangente.
- El vector tangente a un camino $x^\mu(\lambda)$ es

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} .$$

- La condición para el transporte paralelo es:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = 0$$

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}}_{\frac{d}{d\lambda}}\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0}$$

Esta es la ecuación de la geodésica.

- Nota que si $\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = 0$,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad , \text{¡línea recta!}$$

- Veamos una forma alternativa para derivar esta ecuación; el método variacional.
- La acción de una partícula libre

$$S = \int \left( - g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda$$

timelike!

· Para buscar los caminos con el menor tiempo entre dos eventos $\longrightarrow$ cálculo variacional.

Primero,

$$S = \int \sqrt{-f}\, d\lambda \,, \quad f = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

Entonces,

$$\delta S = \int \delta \sqrt{-f}\, d\lambda$$

$$= -\int \frac{1}{2} (-f)^{-1/2} \delta f \, d\lambda \,.$$

Tenemos

$$\delta f = \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}$$

$$= \partial_\alpha g_{\mu\nu} \delta x^\alpha$$

Entonces,

$$\delta S = \int \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \delta x^\alpha + 2 g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) d\lambda$$

donde: $\dfrac{d\tau}{d\lambda} = \sqrt{-f}$.

Int. por partes

$$\delta S = \int \left( \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\delta x^\alpha - 2\delta x^\mu \frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\right) d\tau$$

$$= \int \left( \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\delta x^\alpha - 2\delta x^\mu \partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - 2\delta x^\mu g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right) d\tau$$

Simplificando:

$$\delta S = \int \left( -2 g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\mu g_{\alpha\nu} \underbrace{- 2\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\alpha g_{\mu\nu}}_{-\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\partial_\nu g_{\mu\alpha}} \right) \delta x^\mu d\tau$$

Entonces, $\delta S = 0$ (Principio Hamilton)

$$0 = \int \left( g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}\right)\right)$$

· Multiplicamos por $g^{\mu\beta}$:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0}$$

- Nota sobre la parametrización.
  - En la primera derivación tomamos $\lambda$; un parámetro random.
  - En el segundo caso encontramos uno muy específico; el tiempo propio.

Es claro que la transf.

$$\tau \to \lambda = a\tau + b$$

deja la ecuación invariante.

- Cualquier parámetro relacionado de esta manera al tiempo propio es un parámetro afín.

Conclusión:

- Demandar que un vector tangente sea transportado paralelamente, restringe la parametrización de la curva.

¿Y si usamos otra parametrización?

⇝ Tendremos:

Complica las cosas.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\alpha}\frac{dx^\sigma}{d\alpha} = f(\alpha)\frac{dx^\mu}{d\alpha}$$

para algún parámetro $\alpha(\lambda)$, con

$$f(\alpha) = -\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^{-2}.$$

- Si $\lambda(\alpha)$ es afín, regresamos a la ec. de la geodésica.
- Para caminos timelike tenemos

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

la ec. de la geodésica es:

$$U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0.$$

De igual forma, con el cuadrimomento $p^\mu = mU^\mu$:

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0.$$

· Esto es, partículas en caída libre se mueven en la dirección que apunta su momento.

· <u>Propiedad importante</u>:

El tipo de geodésica (time-, space-, lightlike) se preserva.

⇝ El transporte paralelo preserva el producto interno.

## 2.5. Tensor de Riemann

- La curvatura está cuantificada por el tensor de Riemann.
- Recordemos lo que pasaba en el transporte paralelo de un vector sobre un espacio curvo.

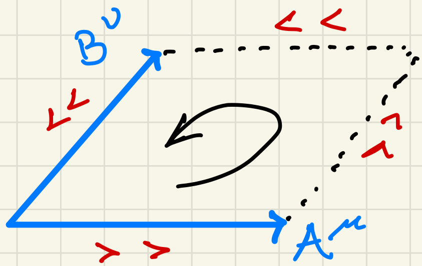
$$\left.\begin{array}{c}\text{Vector inicial}\\ \neq \\ \text{vector final}\end{array}\right\} \text{En un ciclo cerrado.}$$

· Supongamos que tenemos dos vectores

$$A^{\mu} \text{ y } B^{\nu},$$

sobre los cuales transportaremos otro vector

$$V^{\sigma}.$$




· El vector parte de A y se mueve sobre A, luego B y de regreso.

¿Cómo medimos el desface entre vector inicial y final?

- Sabemos que el transporte paralelo es indep. de las coord.

$\rightsquigarrow$ Tensor.

¿Cuantos índices?

$$\delta V^{\rho} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma} A^{\mu} V^{\nu}$$

Tensor de Riemann.