

3.5. Cuantización del Campo Espinorial

• El Lagrangiano de Dirac es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

• Las e.o.m para $\bar{\psi}$ son:

$$\underbrace{\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \boxed{(i\not{\partial} - m)\psi = 0} \quad \text{Ec. de Dirac}$$

para ψ :

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

$$\partial_{\mu} \bar{\psi} i \gamma^{\mu} + \bar{\psi}(x)m = \boxed{\bar{\psi}(x)(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0}$$

↙ Aplica a la 127.

• El campo conjugado a $\psi_a(x)$:

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_a)} = i(\bar{\psi} \gamma^0)_a$$

• El Hamiltoniano es entonces:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\pi_a(x) \dot{\psi}_a(x) - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^3x \left(i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \right) \\ &= \int d^3x \left(i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \bar{\psi} m \psi \right) \\ &= \int d^3x \left(i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi - i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right. \\ &\quad \left. + \psi^\dagger \gamma^0 m \psi \right) \\ &= \int d^3x \left(i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi - i \psi^\dagger \gamma^0 (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) \psi \right. \\ &\quad \left. + \psi^\dagger \gamma^0 m \psi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3x \left(-i \psi^\dagger \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi^\dagger \gamma^0 m \psi \right) \\
 &= \int d^3x \psi^\dagger \left(-i \underbrace{\gamma^0 \vec{\gamma}}_{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} + m \underbrace{\gamma^0}_{\beta} \right) \psi
 \end{aligned}$$

Hamiltoniano de Dirac

· La pregunta es:

¿Cómo cuantizamos esto?

· Esperamos que $\psi_a, \psi_a^\dagger$ creen/aniquilen partículas de espín $1/2$.

→ Deben obedecer el Pauli Principle, estadística de Dirac.

⇒ No más de una partícula en un estado dado.

· La amplitud cambia de signo bajo el intercambio de partículas idénticas.

Conclusión: imponer relaciones de anticomutación.

(Leer 3.5 de Peskin and Schröder)

Esto es :

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{x}')\} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{x}')\} = 0 = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{x}')\}$$

Expandiendo en modos de Fourier :

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u_s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v_s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

→ dos tipos de operadores a, b asociados a estados de energía pos. y neg. .

→ Escribir $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ es convención :

$a^\dagger, b^\dagger$ crean partículas con energía positiva.

El campo conjugado :

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}_s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^s \bar{v}_s(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

· Estos operadores obedecen:

$$\{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{p}'}^{s'+\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{p}'}^{s'+\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = \{a^\dagger, b^\dagger\} = 0$$

· Calculando el Hamiltoniano en términos de modos de Fourier:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s\dagger})$$

· Usando $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$:

$$[H, a_{\vec{p}}^{s\dagger}] = E_p a_{\vec{p}}^{s\dagger},$$

$$[H, a_{\vec{p}}^s] = -E_p a_{\vec{p}}^s,$$

$$[H, b_{\vec{p}}^{s\dagger}] = E_p b_{\vec{p}}^{s\dagger},$$

$$[H, b_{\vec{p}}^s] = -E_p b_{\vec{p}}^s.$$

$\Rightarrow a^\dagger, b^\dagger$ son operadores que crean partículas con energía positiva.

Definimos el vacío como

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0$$

Aplicamos el concepto de **normal ordering**:

"Operadores de aniquilación a la derecha"

$$\leadsto : b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s\dagger} : = - b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \text{ etc...}$$

Entonces,

$$:H: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right)$$

Usamos $:H:$ como H ; descartamos energía infinita de punto cero.

(zero-point energy).

$$\leadsto H|0\rangle = 0$$

vacío tiene energía cero.

- Los estados de una partícula normalizados:

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle$$

$$|\vec{p}, s\rangle' = \sqrt{2E_{\vec{p}}} b_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle$$

→ Partículas creadas por $a^\dagger$ son llamadas **fermiones**, por $b^\dagger$ **antifermiones**.

- El estado de dos partículas:

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2\rangle &= \sqrt{4E_1 E_2} a_{\vec{p}_1}^{s_1\dagger} a_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger} |0\rangle \\ &= -\sqrt{4E_1 E_2} a_{\vec{p}_2}^{s_2\dagger} a_{\vec{p}_1}^{s_1\dagger} |0\rangle \\ &= -|\vec{p}_2 s_2, \vec{p}_1 s_1\rangle \end{aligned}$$

Sigue la **estadística de Fermi-Dirac**.

- Pasemos a la Heisenberg Picture

$$i\partial_t \psi(\vec{x}, t) = [\psi(\vec{x}, t), H]$$

Solución:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right)$$

• Se tiene que la carga conservada es

$$Q = \int d^3 x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3 x \psi^\dagger \psi$$

por el teorema de Noether. (Investigar please)

• ¿Carga? ¿Para qué?

→ Acoplamiento al fotón

¿Cómo?

→ Minimal substitution:

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

← Campo EM.

El Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi$$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi}_{\text{Dirac libre}} - \underbrace{e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{\text{interacción}}$$

- A^0 se acopla a la carga eléctrica

$$e \psi^\dagger \psi$$

$$(e A_0 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = e A_0 \psi^\dagger \psi).$$

→ Esta es la densidad de carga del campo de Dirac.

- En modos de Fourier :

(después de dos hgas de falacha)

$$Q = e \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s\dagger} \right)$$

queremos el vacío sin carga

$$:Q: = e \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right)$$

$$\Rightarrow :Q:|0\rangle = 0 \quad \checkmark$$

Conclusión:

$a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ crea una partícula de carga e ,
 $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ " " " " " $-e$.

• Q/e cuenta $\#(\text{electrons}) - \#(\text{positrons})$

• Simetría partícula-antipartícula:

misma masa, espín
 diferente carga, momento magnético.

3.6. Propagador de Dirac

• Análogo al conmutador con KG, tenemos el anticommutador:

$$S_{ab}(x-y) = \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}$$

o con notación más corta:

$$S(x-y) = \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}$$

· Usando la descomposición en modos:

$$S(x-y) =$$

$$\int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_p E_{p'}}} \sum_{s, s'} \left(\{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{p}'}^{s'}\} u_s(\vec{p}) \bar{u}_{s'}(\vec{p}') e^{-ipx + ip'y} \right. \\ \left. + \{b_{\vec{p}}^{s\dagger}, b_{\vec{p}'}^{s'}\} v_s(\vec{p}) \bar{v}_{s'}(\vec{p}') e^{ipx - ip'y} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_s \left(\underline{u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p})} e^{-ip(x-y)} + \underline{v_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p})} e^{ip(x-y)} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left((\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} + (\not{p} - m) e^{ip(x-y)} \right)$$

$$= (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-y)} - (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip(x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m) \left[D(x-y) - D(y-x) \right]$$

(compara esto a lo visto en KG).

De forma similar, podemos calcular:

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)}$$

(Solo $a, a^\dagger$ contribuyen).

Annotations: $a, b^\dagger$ (under ψ_a), $a^\dagger, b$ (under $\bar{\psi}_b$)

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (\not{p} - m) e^{ip(x-y)}$$

(Solo $b, b^\dagger$ contribuyen)

Definimos el time-ordered Dirac field:

$$T(\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)) = \Theta(x^0 - y^0) \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) - \Theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x).$$

El propagador de Feynman es:

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

• Nota: Verifica:

$$\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon} = \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}.$$

Finalmente, el propagador de Dirac es una función de Green del operador de Dirac.

$$\begin{aligned}(i\not{\partial}_x - m) S_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(p^2 - m^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x-y)} \\ &= i \delta^{(4)}(x-y) \mathbb{1}_{4 \times 4} \quad \checkmark.\end{aligned}$$