

* Incluyendo materia:

· Hasta ahora tenemos $G_{\mu\nu} = 0$.

¿Y la materia?

· Para esto, agregamos un término de materia a la acción:

$$S = \frac{1}{2\kappa} S_H + S_M$$

· Haciendo la variación respecto a la métrica, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \end{aligned}$$

· Definimos el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

→ Tensor $(0,2)$ simétrico, conservado con dimensiones de energía.

· Finalmente tenemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

· Ahora sí, tenemos que

$$\nabla^\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = 0,$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0,$$

como queríamos.

· Recuerda que:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0j} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{densidad de energía} & \text{densidad de momento} \\ \text{flujo de energía} & \text{tensor de estrés} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, para el campo escalar tenemos:

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

3.4. Constante Cosmológica

• Dado que $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$, podemos agregar $\Lambda g_{\mu\nu}$

a las ecuaciones de Einstein sin afectar sus propiedades.

Entonces,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- La pregunta es, ¿Sirve de algo?
- Cuando Einstein propuso sus ecuaciones, se creía que el Universo era estático.
- Dado que $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ permite evolución, agrego Λ para hacerlo estático.
- Edwin Hubble mostró que sí se expande.

~> Einstein lo consideró su mayor error.

- Hoy en día Λ es crucial para explicar la expansión acelerada del Universo.

~> Dark Energy

3.5. Métrica de Schwarzschild

Consideremos la ecuación de Einstein en el vacío y busquemos una solución.

Esto es, $T_{\mu\nu} = 0$.

Tenemos :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

tomando la traza:

$$R - \frac{1}{2} R(4) + 4\Lambda = 0$$

$$R = 4\Lambda$$

esto nos lleva a $\boxed{R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}}$

Dado que los objetos bajo estudio presentan simetría esférica (planetas, estrellas) escribimos:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- Por ahora tomemos $\Lambda = 0 \Rightarrow P_{\mu\nu} = 0$.
- Siguiendo el teorema de Birkhoff:
 "Cualquier solución esféricamente simétrica en el vacío debe ser estática".
- Con esto, escribimos el Ansatz:

$$ds^2 = -\underline{e^{2\alpha(r)}} dt^2 + \underline{e^{2\beta(r)}} dr^2 + \underline{e^{2\gamma(r)}} r^2 d\Omega^2$$

(Exponenciales para que no cambien los signos de la métrica).

- Primero, definamos

$$\bar{r} \equiv e^{\gamma(r)} r$$

$$\begin{aligned} \leadsto d\bar{r} &= e^{\gamma} dr + e^{\gamma} r d\gamma \\ &= \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr \end{aligned}$$

Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} d\bar{r}^2 \\ &\quad + \bar{r}^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

· Haciendo el renombramiento

$$\bar{r} \rightarrow r$$

$$\left(1 + r \frac{dr}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} \rightarrow e^{2\beta}$$

tenemos:

$$ds^2 = -\underline{e^{2\alpha(r)}} dt^2 + \underline{e^{2\beta(r)}} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

(nota que $e^{\gamma(r)}$ ya no está).

· Los Christoffel son:

$$\Gamma_{tr}^t = \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = r^{-1}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\beta}$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = r^{-1}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta$$

Con esto calculamos el tensor de Ricci.

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + 2r^{-1} \partial_r \alpha \right]$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + 2r^{-1} \partial_r \beta$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} \left[r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1 \right] + 1$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$$

• Finalmente, el escalar de curvatura es:

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right]$$

• Recordemos que buscamos soluciones con

$$R_{\mu\nu} = 0$$

esto se cumple con $\alpha = -\beta$ (tarea).

• Con esto, de $R_{\theta\theta} = 0$:

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1$$

$$\leadsto \partial_r (r e^{2\alpha}) = 1$$

$$\leadsto e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

donde $R_s = 2GM$ (tarea).

Entonces, la métrica de Schwarzschild es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- Nota que recuperamos Minkowski
con:

$$* \quad r \rightarrow 0$$

$$* \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{Asymptotic flatness}).$$