

- Si queremos una función de onda que satisfaga la ec. de Dirac, tendremos cuatro grados de libertad.

¿Cómo se ven α_i y β ?

- Hay distintas matrices que cumplen con los requerimientos.

Por ejemplo,

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta es la representación estándar o de Dirac.

- Volviendo a la ecuación de Dirac, si multiplicamos por β :

$$(i\beta\alpha_x\partial_x + i\beta\alpha_y\partial_y + i\beta\alpha_z\partial_z + i\beta\partial_t - \beta^2 m)\psi = 0$$

• Ahora, definimos las matrices gamma como:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^1 \equiv \beta \alpha_x, \quad \gamma^2 \equiv \beta \alpha_y, \quad \gamma^3 \equiv \beta \alpha_z$$

tendremos:

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\gamma^1 \partial_1 \psi + i\gamma^2 \partial_2 \psi - m\psi = 0,$$

y finalmente:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

• Esta es la ec. de Dirac en su forma covariante

• Podemos introducir la siguiente notación

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$$

conocida como Slash de Feynman para escribir:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0.$$

Ahora, veamos algunas propiedades de las γ^μ :

$$\begin{aligned}(\gamma^1)^2 &= \beta \alpha_x \beta \alpha_x = -\alpha_x \beta \beta \alpha_x \\ &= \alpha_x^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

De igual forma:

$$\begin{aligned}(\gamma^0)^2 &= 1 \\ (\gamma^\kappa)^2 &= -1 \quad \kappa = 1, 2, 3 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu &= -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad \text{para } \nu \neq \mu\end{aligned}$$

Finalmente escribimos:

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}}$$

Es fácil mostrar que son Hermitianas:

$$\begin{aligned}(\gamma^1)^\dagger &= (\beta \alpha_x)^\dagger = \alpha_x^\dagger \beta^\dagger = \alpha_x \beta \\ &= -\beta \alpha_x \\ &= -\gamma^1.\end{aligned}$$

↳ Las γ^μ .

Entonces

$$(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0, \quad (\gamma^{\kappa})^{\dagger} = -\gamma^{\kappa}.$$

En esta representación de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\kappa} \\ -\sigma_{\kappa} & 0 \end{pmatrix}.$$

De forma explícita:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Es conveniente definir el espinor adjunto para futuros cálculos:

$$\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0}$$

• De igual forma, definimos la matriz γ^5 :

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que cumple:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

$$(\gamma^5)^2 = 1$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0$$

• Recuerda que estamos trabajando con la representación de Dirac. Existe otra llamada de weyl o chiral.

→ Estas propiedades son indep. de la representación

3.3.1. Soluciones de la Ecuación de Dirac

- Proponemos la solución de onda-plana como en KG:

$$\psi(x) = \underbrace{u(p)}_{\text{! Espinor!}} e^{-ip \cdot x} \quad \text{con } p^2 = m^2.$$

- Sustituimos en la ec. de Dirac:

$$(E \gamma^0 - p_x \gamma^1 - p_y \gamma^2 - p_z \gamma^3 - m) u = 0$$

De forma matricial

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} - m \mathbb{1} \right] u = 0$$

con $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$

Si escribimos u en términos de dos espinores de dos componentes:

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix},$$

tendremos:

$$\begin{pmatrix} (E-m)\mathbb{I} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -(E+m)\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0$$

Lo que nos da un par de ec. acopladas

$$u_A = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} u_B,$$

$$u_B = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} u_A.$$

Podemos encontrar dos soluciones si tomamos

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos da:

$$u_1(E, \vec{p}) = N_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{bmatrix}, \quad u_2(E, \vec{p}) = N_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{bmatrix}$$

donde N_1 y N_2 son constantes de normalización.

• Hacemos lo mismo para u_B :

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Con esto, podemos escribir las soluciones de onda plana

$$\psi_i = u_i(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$$

con

$$u_3 = N_3 \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_4 = N_4 \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Si sustituimos cualquiera de estos cuatro espinores en la ec. de Dirac, recuperamos:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

- $u_1, u_2 \rightarrow$ espinores de energía positiva.
- $u_3, u_4 \rightarrow$ espinores de energía negativa.

3.4. Antipartículas

- Tenemos soluciones a la ec. de Dirac ¿Ahora qué?
- Interpretación dada por Stückelberg - Feynman:

→ Tenemos que las soluciones $E < 0$, son partículas con energía negativa que se propagan atrás en el tiempo.

Esto corresponde a partículas físicas con energía positiva y carga opuesta que se propagan adelante en el tiempo: **ANTIPARTÍCULAS**

¿Qué pasa con la función de onda?

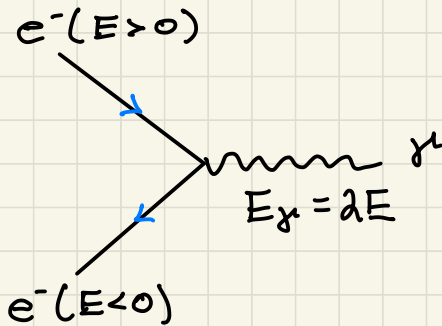
$$\psi = u(p) e^{-ip \cdot x}$$

La parte temporal:

$$e^{-iEt} \equiv e^{-i(-E)(-t)}$$

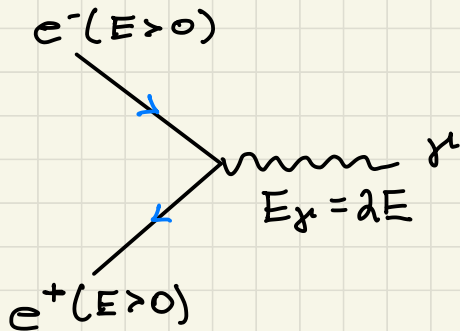
i Invariante!

Ejemplo:



"Electrón emite fotón con $2E$ y un electrón con $-E$ para conservar la energía"

→ tiempo



"Electrón y positrón se aniquilan emitiendo un fotón con $E + E$ de energía"

→ Stückelberg - Feynman

positrón

• Antipartículas: energía negativa, momento negativo.

Para evitar confusiones definimos:

$$u_1(E, \vec{p}) e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} = u_4(-E, -\vec{p}) e^{i[-\vec{p} \cdot \vec{x} - (-E)t]}$$

$$u_2(E, \vec{p}) e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} = u_3(-E, -\vec{p}) e^{i[-\vec{p} \cdot \vec{x} - (-E)t]}$$

Entonces, para antipartículas

$$\psi = u(E, \vec{p}) e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$$

$$\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \underline{\underline{-E}} \psi.$$

• La ec. de Dirac para partículas y antipartículas:

$$(\not{p} - m)u = 0$$

← Partículas

$$(\not{p} + m)v = 0$$

← Antipartículas.