# Unidad 3: Gravitación

## 3.1. Principio de Equivalencia

- La gravedad es especial.
  → Se genera a partir del tensor métrico.
- Einstein:
  - La gravedad no sale por un campo en el espaciotiempo.
  - Es la curvatura del mismísimo espaciotiempo.
- Todo esto del

**Principio de equivalencia**

"Los efectos gravitatorios son indistinguibles de un marco de referencia acelerado".

¡Localmente! (no opcional)

· Hay tres tipos:

- **Principio de equivalencia débil:**

"Todos los cuerpos caen con la misma aceleración, sin importar su masa".

Esto es:

$$\boxed{m_{grav} = m_{inerc}}$$

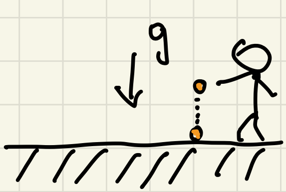
¿Cuál es la diferencia entre ellas?

$$\vec{F} = m_{inerc}\,\vec{a}\,, \qquad \vec{F}_g = -m_{grav} \nabla \phi$$

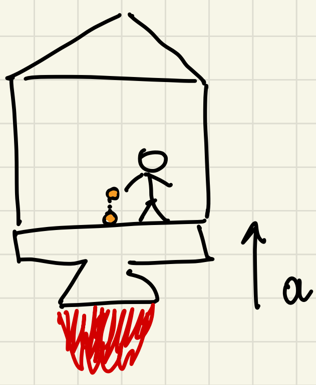
- **Principio de equivalencia de Einstein:**

"En espacios pequeños, los efectos de la gravedad son indistinguibles de la aceleración".

Esto es:




Indistinguible de:



- Principio de Equivalencia fuerte:

"El Principio de Einstein aplica para todas las leyes físicas".

Conclusiones:

- La gravedad es inescapable.
- No existen objetos neutros gravitacionalmente.
- Aceleración debido a la gravedad makes no sense.

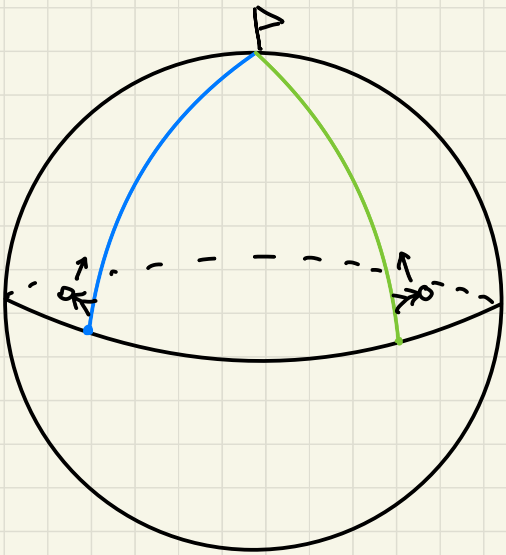
⇝ Los objetos siguen naturalmente los caminos más cortos sobre el espaciotiempo (geodésicas).

Todo esto sin sentir un "empujón" como en el caso clásico.

⇒ $\boxed{\text{Caída libre} = \text{sin aceleración}}$

Gravedad no es una fuerza.

· Piensa en lo siguiente:



· Dos observadores están en el ecuador y caminan al polo norte.

· Notan que ambos se acercan entre sí.

· Pero, ambos se mueven a velocidad constante en línea recta.

· Cada observador cree que el otro se acerca de manera acelerada a él.

⤳ Simplemente seguían la geodésica sobre la esfera.

⤳ No existe dicha fuerza. Es solo la geometría del espaciotiempo.

# 3.2. Ecuación de Einstein

- La ecuación de Einstein nos dice cómo la métrica responde a la energía y momento.
- Hay dos formas de deducirlas:
  1) Por analogía a Newton.
  2) Con una acción.
- La primera va así:

Necesitamos generalizar:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho}$$

donde $\rho$ es la densidad de masa, a una ecuación tensorial.

- Reemplazamos

$$\Phi \longrightarrow g_{\mu\nu}$$

$$\rho \longrightarrow T_{\mu\nu}$$

Entonces,

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$$ ← solo notación.

· Si consideramos las derivadas de la métrica,

$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0,$$

no es de mucha ayuda.

⇝ Tomemos el Ricci.

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

¿Por qué? $R_{\mu\nu}$ contiene segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$.

· Problema: Conservación de energía.

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$$

entonces

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = 0,$$

pero esto no es cierto para una geometría arbitraria.

Recordemos $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$.

- Por fortuna, ya contamos con un tensor $(0,2)$ conservado:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

que siempre cumple $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$.

- Finalmente, proponemos:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}}$$

donde $\kappa = 8\pi G$. $\longleftarrow$ De tarea.

- La <u>segunda</u> forma:

Proponemos:

$$\boxed{S_H = \int d^n x \sqrt{-g}\, R}$$

Esta es la acción de Hilbert.

# 3.3. Formalismo Lagrangiano

- La segunda forma de obtener las ec. de Einstein es por el método variacional.
- Tomamos la acción de Hilbert-Einstein

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g}\, R$$

y buscamos las e.o.m:

$$\delta S_H = \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right)$$

$$= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3$$

con:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \underbrace{\delta R_{\mu\nu}}_{?}$$

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu} \underbrace{\delta g^{\mu\nu}}$$

$$\delta S_3 = \int d^4x \underbrace{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}_{?} R$$

- Comenzamos con $\delta S_1$.

· El Ricci sale del Riemann

$$R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu)$$

Primero variamos los Christoffel

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \longrightarrow \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \underbrace{\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}}_{\text{¡Tensor!}}$$

Tomamos la deriv. covariante:

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) = \partial_\lambda(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}$$

· Es fácil mostrar que:

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu})$$

· Tenemos que $\delta S_1$:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})\right)$$

De tarea, mostrar que $\underline{\underline{\delta S_1 = 0}}$.

· Para $\delta S_3$ necesitamos:

$$\ln(\det M) = \mathrm{Tr}(\ln M)$$

con $M$ cuadrada, $\det M \neq 0$ y $\exp(\ln M) = M$.

· La variación de esta identidad:

$$\frac{1}{\det M}\,\delta(\det M) = \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)$$

· Si tomamos que $M \to g^{\mu\nu}$,

$$\det M = \det g^{\mu\nu} = g$$

· Entonces,

$$\begin{aligned}\delta g &= g\left(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right)\\ &= -g\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}$.

Esto es

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g\\ &= \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}.$$

· Recordando que $\delta S_1 = 0$

$$\delta S_{H} = \int d^4x \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}$$

$\rightsquigarrow$ puntos estacionarios satisfacen:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0}$$