

Breve repaso : Cono de luz

• El intervalo relativista entre dos eventos x^μ y y^μ es :

$$s^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$$

• El signo de s^2 determina la relación causal entre los eventos :

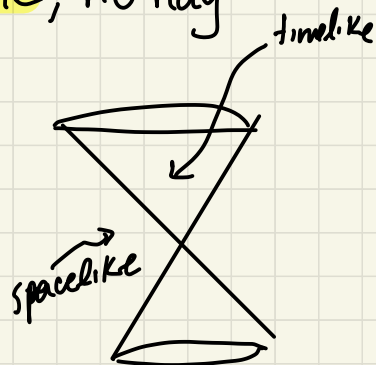
$s^2 > 0$: Eventos separados por más tiempo que espacio.

→ separación tipo timelike, hay conexión causal.

$s^2 < 0$: Eventos separados por más espacio que tiempo.

→ separación tipo spacelike, no hay conexión causal.

$s^2 = 0$: separación lightlike.
basicamente luz.



• Recordemos:

→ Transf. de Lorentz preservan s^2 .

• Estudiemos qué pasa si:

$(x-y)^2 < 0$ (fuera del cono de luz):

"Existe una transf. de Lorentz que puede intercambiar su orden".

(Relatividad de lo simultáneo)

Esto es: $x-y \rightarrow -(x-y)$.

$(x-y)^2 > 0$ (en el cono de luz):

"No existe una transf. que invierta su orden"

Esto es, si y ocurre después de x en un marco de ref., será así para todos. (timelike connected).

$x-y \rightarrow -(x-y)$ not allowed!

No es una transf. válida.

- En la teoría de KG, nos interesará calcular:

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

para estudiar la causalidad de la teoría.

2.5. Propagador Escalar

- Querramos considerar objetos tipo

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

El propagador será:

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

Partícula creada en y , propagándose a x .

- Separamos $\phi(x)$ en $\phi^+(x) + \phi^-(x)$ con:

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \quad \text{"frec. positiva"}$$

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \quad \text{"frec. negativa"}$$

Entonces,

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)] = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^+] e^{-i(p \cdot x - p' \cdot y)}$$

$$= \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}}_{\text{Inv. de Lorentz}} \underbrace{e^{-ip \cdot (x-y)}}_{\text{Inv. de Lorentz}}$$

$$\equiv \mathcal{D}(x-y).$$

$\mathcal{D}(x-y)$ es un inv. de Lorentz.

Ahora, calcula

$$[\phi(x), \phi(y)] = \dots = \mathcal{D}(x-y) - \mathcal{D}(y-x).$$

Causalidad:

Si $x-y$ es spacelike, existe una transf. de Lorentz que

$$x-y \rightarrow -(x-y)$$

entonces,

$$D(x-y) - D(y-x) = 0$$

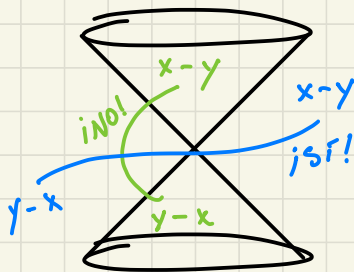
y

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

Este no es el caso si son **timelike**.

Conclusión:

- (i) $\phi(x), \phi(y)$ son "simultáneamente medibles" si están separados de forma spacelike.
- (ii) Causalidad se preserva: una medición de ϕ en x no afecta ϕ en y si $x-y$ es spacelike (fuera del cono de luz).



- En TCC, la causalidad requiere la existencia de **antipartículas** con la misma masa y números cuánticos opuestos. ↪ Más adelante veremos esto.

El propagador de Klein-Gordon

• Voluamos a

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(y) | 0 \rangle$$

Dado que $\phi^+(y) | 0 \rangle = 0$ y $\langle 0 | \phi^-(x) = 0$,

$$= \langle 0 | \underbrace{[\phi^+(x), \phi^-(y)]}_{\text{número}} | 0 \rangle = D(x-y)$$

$\uparrow$
 $\langle 0 | 0 \rangle = 1$

→ El conmutador es igual a un tipo de propagador.

• Resulta que la forma más útil del propagador es

El propagador de Feynman

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

donde T denota time-ordering:

$$D_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

$$= \Theta(x^0 - y^0) \Delta(x - y) + \Theta(y^0 - x^0) \Delta(y - x)$$

• Mostremos una representación integral para $\Delta_F(x - y)$.

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x - y)}$$

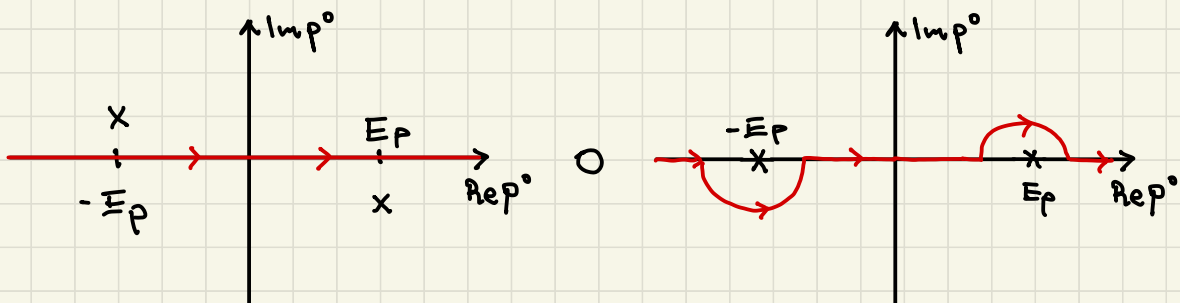
Tenemos:

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} \quad \text{con } E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Para una función de p^0 , esto tiene polos en

$$p^0 = \pm(E_p - i\epsilon)$$

y residuo: $\pm \frac{1}{2E_p}$.



• Para hacer la integración de p^0 , cerramos el contorno:

(i) $x^0 > y^0$: necesitamos $\text{Im } p^0 < 0$ para obtener exponencial convergente
 $\rightarrow$ cerramos por abajo (E_p contribuye)

$$\mathcal{D}_F(x-y) \stackrel{x^0 > y^0}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{clockwise}}}{(-2\pi i)} \frac{i}{2E_p} e^{-iE_p(x-y^0) + i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} = \mathcal{D}(x-y)$$

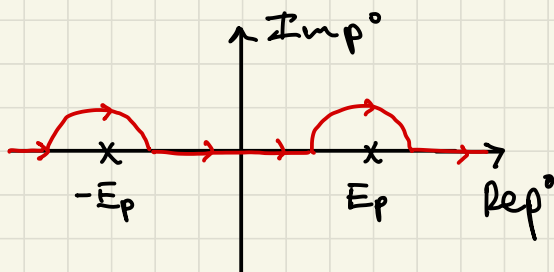
(ii) $y^0 > x^0$: $\rightarrow$ cerramos por abajo ($-E_p$ contribuye)

$$\mathcal{D}_F(x-y) \stackrel{y^0 > x^0}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{anti clockwise}}}{(+2\pi i)} \frac{-i}{2E_p} e^{iE_p(x-y^0) + i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(y-x)} = \mathcal{D}(y-x)$$

• Elegimos $\mathcal{D}_F$ por cómo deformamos el contorno de integración / desplazamos los polos.

• Otra forma de cerrar el contorno



• No es cero para $x^0 > y^0$,
este es el propagador
retardado

$$D_R = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

• El propagador de Feynman es una función
de Green del operador de KG.

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + m^2) D_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-i) e^{-ip(x-y)} = -i \delta^{(4)}(x-y) \quad \checkmark \end{aligned}$$