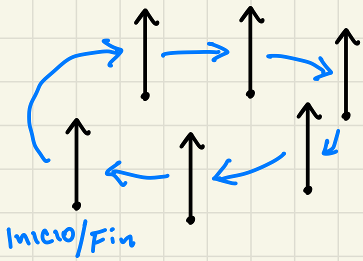
2.3. Transporte Paralelo

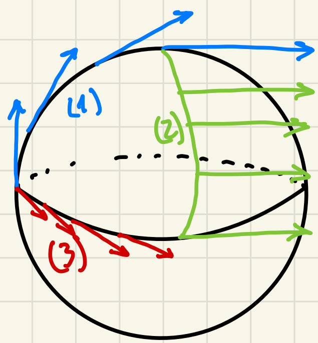
- Es hora de comenzar a movernos sobre la variedad.

- Sobre un espacio plano, si movemos un vector sin rotarlo y luego lo regresamos a donde inició, éste apuntará en la misma dirección.



Mantiene su orientación; es el mismo vector al inicio y fin.

- Sobre una superficie curva, este no es el caso.



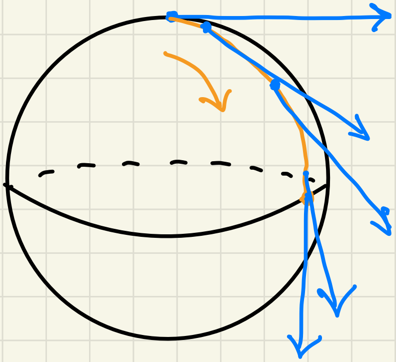
Ejemplo, movemos un vector por los caminos (1), (2) y (3), tratando de mantenerlo paralelo a la superficie.

$$\boxed{\text{Vector inicial} \neq \text{Vector final}}$$

<u>Nota</u>: Las flechas deberían tener la misma longitud, pero dibujo feo.

Esto es transporte paralelo:

"Una forma de mover vectores sobre una superficie que los mantiene constantes"



· Se mantiene constante para un observador sobre la curva.

· Lamentablemente, no hay forma de sacarle la vuelta a este problema (el de mover el vector en un loop).

· Ahora veamos cómo estudiar esto con el formalismo que conocemos.

· Para mantener un tensor constante sobre una curva $x^{\mu}(\lambda)$:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = 0$$

Para hacerlo tensorial, $\partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}$:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = 0 \qquad (*)$$

Esto es lo que define transporte paralelo.

· En el caso de un vector tenemos:

$$\frac{d}{d\lambda}V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}V^\rho = 0$$

En resumen:

Dado un tensor en un punto sobre una curva, habrá un camino único a otros puntos sobre la curva que cumple (*).

Decimos que el tensor fue paralelamente transportado.

Nota que

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$$

si hay metric compatibility.

Esto significa que:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma\left(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu\right)=0\,,$$ preserva la norma.

Esto es, preserva la ortogonalidad entre vectorés.

Conclusión

(i) Transporte paralelo nos sirve para comparar tensores en diferentes puntos sobre la variedad.

(ii) Nos servirá para definir la ecuación de la geodésica.