## §2.4. Partículas

· Al igual que en el caso de el oscilador armónico, escribimos:

$$[H, a^\dagger_{\vec{p}}] = \omega_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}}$$

$$[H, a_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$$

· El estado vacío está definido:

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$$

y tiene $E=0$.

· El resto de los estados de energía:

$$a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{q}} \cdots |0\rangle$$

es eigenestado de $H$ con energía

$$\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}} + \ldots$$

· Esto describe por completo el espectro

¿Qué significa todo esto?

Recordemos (de su examen) que:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, \vec{p} \, a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}$$

es el operador total de momento.

· Esto es,

$$a_p^{\dagger} a_q^{\dagger} \cdots |0\rangle$$

tiene momento $\vec{p} + \vec{q} + \cdots$.

· Estas excitaciones del campo son llamadas partículas.

Nota: no localizado en espacio.

$a^{\dagger}$ crea partículas en estados de momento.

· Considera un estado de dos partículas

$$a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{q}}^{\dagger} |0\rangle$$

Dado que $a^\dagger_{\vec{p}}$ y $a^\dagger_{\vec{q}}$ conmutan:

$$a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{q}} |0\rangle = a^\dagger_{\vec{q}} a^\dagger_{\vec{p}} |0\rangle$$

Conclusión: Partículas en la teoría KG obedecen Bose-Einstein.

· Definamos algunas convenciones:

- Estado vacío $\langle 0|0\rangle = 1$
- Estado de una partícula $|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}\, a^\dagger_{\vec{p}} |0\rangle$

$$\langle \vec{p}|\vec{q}\rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q})$$

con $E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.

· Ahora, ¿Qué significa $\phi(\vec{x})|0\rangle$?

Recordando que

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

tenemos que:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

es una superposición lineal de estados de una partícula con momento definido.

$\Rightarrow$ $\boxed{\phi(\vec{x}) \text{ actuando en el vacío crea una partícula en } \vec{x}.}$

Si calculamos

$$\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = \langle 0| \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} \left( a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + a^{\dagger}_{\vec{p}'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right) \sqrt{2E_{\vec{p}}}\, a^{\dagger}_{\vec{p}} |0\rangle$$

$$= e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$\Rightarrow$ Representación en espacio de la fn. de onda de una partícula del estado $|\vec{p}\rangle$.

- Hasta ahora hemos trabajado en la Schrödinger Picture. Pasemos a la de Heisenberg.
- Hacemos nuestros operadores $\phi$ y $\pi$ dep. del tiempo:

$$\phi(x) = \phi(\vec{x},t) = e^{iHt}\phi(\vec{x})e^{-iHt},$$

igual para $\pi(x)$.

- La ec. de movimiento de Heisenberg es:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H].$$

Con esto:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = i\pi(x)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = -i(-\nabla^2+m^2)\phi(x)$$

Combinando:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (\nabla^2-m^2)\phi}\ \text{¡KG!}$$

· De nuevo, escribamos $\phi$ y $\pi$ en términos de $a$ y $a^+$.

Notemos que:

$$H a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_{\vec{p}}),$$
$$H a^{\dagger}_{\vec{p}} = a^{\dagger}_{\vec{p}}(H + E_{\vec{p}}),$$

con esto, podemos escribir:

$$e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t}$$
$$e^{iHt} a^{\dagger}_{\vec{p}} e^{-iHt} = a^{\dagger}_{\vec{p}} e^{iE_{\vec{p}}t}$$

(Recordemos que estamos calculando $e^{iHt}\phi(\vec{x})\phi^{-iHt}$).

Finalmente, tenemos:

cuadrivectores

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a^{\dagger}_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

$$\pi(\vec{x},t) = \dot{\phi}(\vec{x},t)$$

· De estas ecuaciones vemos explícitamente la dualidad onda-partícula.

· $\phi(x)$ representa:

↳ Crea y destruye partículas $(a^{\dagger}, a)$

↳ Comb. lineal de $e^{ip\cdot x}$ y $e^{-ip\cdot x}$.

¡Ambos están conectados!

• Para campos libres tenemos:

→ Coeficiente de la solución con frecuencia positiva = operador destruyendo la partícula

i.e. $a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x}$.

→ Coeficiente de la solución con frecuencia negativa = operador creando la partícula

i.e. $a^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}$.

Conclusión: La cuantización del campo de KG nos lleva a un campo que tiene características de onda y partícula.

· Ahora hablemos un poco sobre causalidad.

· Consideremos una partícula libre propagándose entre $\vec{x}_0$ y $\vec{x}$:

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle$$

En Mec. Cuántica norelativista $E = \vec{p}^2/2m$:

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-i(\vec{p}^2/2m)t} | \vec{x}_0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x} | e^{-i(\vec{p}^2/2m)t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \, e^{-i(\vec{p}^2/2m)t} \, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{im(\vec{x}-\vec{x}_0)^2/2t}$$

• Esto nunca es cero para todo t y x

$\Rightarrow$ La partícula puede propagarse entre dos puntos en un tiempo arbitrario.

$\rightsquigarrow$ No respeta causalidad.

Lo mismo sucede incluso si usamos

$$E = \sqrt{p^2+m^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}$$

- Es pequeño, pero no cero. (Hay prob. de propagación fuera del cono de luz).

$\rightsquigarrow$ La Teoría Cuántica de Campos resuelve estos problemas.