Unidad 2. Curvatura

2.1. Motivación

En esta unidad discutiremos la otra parte fundamental de Relatividad General:

$\rightsquigarrow$ Curvatura

¿Por qué?

- La conclusión de Einstein fue que la gravedad se debe a la curvatura del espaciotiempo.

· Hasta ahora estudiamos espaciotiempo:

- Variedades
- Espacio tangente T_p
- " Cotangente T_p^*
- Vectores V^μ
- Vectores duales ω_μ
- Métrica $g_{\mu\nu}$
- Tranf. de Lorentz $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$

· Aquí aprenderemos a aplicar estas herramientas, mientras definimos otras.

Quick overview:

- Símbolos de Christoffel:

⇝ Describen cómo los vectores cambian mientras se mueven en el espaciotiempo.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right)$$

- Derivada Covariante

⇝ Generalización de la derivada parcial.

$$\nabla_\mu V = \partial_\mu V + \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} V^\sigma$$

- Geodésicas

⇝ Generalización de "caminos rectos" en espaciotiempo.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

- Tensor de Riemann

⇝ Encapsula cómo se curva el espaciotiempo.

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

- Ecuación de Einstein

⇝ Relacionan la curvatura a la distribución de energía.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

· Al final sabremos utilizar e interpretar estas ecuaciones.

2.2. Derivada Covariante

· La derivada parcial no transforma como un tensor.

⇝ Necesitamos arreglar esto.

· Definimos la derivada covariante tal que, en el espacio plano se reduzca a la parcial.

Esto es, para un vector V^μ

$$\nabla_\mu V^\nu = \underbrace{\partial_\mu V^\nu}_{\text{Espacio plano}} + \underbrace{\cdots}_{\text{corrección por curvatura.}}$$

· Aquí es donde introducimos los símbolos de Christoffel.

$$\rightsquigarrow \boxed{\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda}$$

· La pregunta ahora es:

¿Como transforma $\nabla_\mu V^\nu$?

Queremos que:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu$$

¡Tensor tipo (1,1)!