Unidad II. El Campo Escalar

§2.1 La ecuación de Klein-Gordon

· Recordemos un poco de lo que hemos visto:

· Partículas:

⇝ Movimiento descrito con posición y momento.

- Ondas:

⇝ Evolución descrita por campos (e.g., electro).

- Si queremos describir sistemas a pequeñas escalas:

⇝ $\boxed{\text{Mecánica Cuántica}}$

Para describir un sistema:

⇝ Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

↳ Hipótesis de de Broglie

"Dualidad onda-partícula"

· Las ondas se pueden escribir en componentes usando análisis de Fourier.
(Onda de sonido ⟶ suma de tonos puros).

· Cada tono puro representa una oscilación armónica simple.

⇝ ¡Lo mismo aplica en campos!

· Descomposición de Fourier del campo: Definido en todo el espacio.

↳ Número infinito de modos

⇝ **Campo : Conjunto infinito de osciladores armónicos**

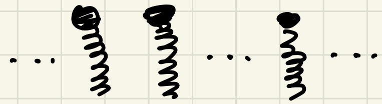
· Cada modo tiene energía asociada.
Por Mec. Cuántica ⟶ cuantizada. ¡Partículas!

· Dado que trabajamos con osciladores armónicos, recordemos:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{q}^2}_{\text{cinética}} - \underbrace{\frac{1}{2} k q^2}_{\text{potencial}}$$

· Ahora, un número infinito de ellos (en 1D), se mueven arriba y abajo (indep. del vecino).

⇝ Desplazamiento : $\phi(x,t)$.



: $L = \int dx \left(\frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} k \phi^2 \right)$

Generalizando a 3D : $\phi(\vec{r}, t)$

$$L = \int d^3x \left(\frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} k \phi^2 \right)$$

· ¿Interacción entre vecinos?

↳ Agrega $(\nabla \phi)^2$ al Lagrangiano.

Entonces,

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}$$

Densidad Lagrangiana

De tarea, ¿por qué ...

$(\nabla \phi)^2$, $k \to m^2$ y $\mathcal{L}$ (en lugar de L)?

· Este es el Lagrangiano para el campo escalar. Su forma covariante es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2.$$

Recuerda que:

Importante!

$\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla})$

$\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, +\vec{\nabla})$

$$\begin{aligned}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi &= \partial^0\phi\partial_0\phi + \partial^1\phi\partial_1\phi + \partial^2\phi\partial_2\phi \\ &\quad + \partial^3\phi\partial^3\phi \\ &= (\partial_t\phi)^2 + (-\partial_x\phi)\partial_x\phi + (-\partial_y\phi)(\partial_y\phi) \\ &\quad + (-\partial_z\phi)(\partial_z\phi) \\ &= \dot{\phi}^2 - (\partial_x\phi)^2 - (\partial_y\phi)^2 - (\partial_z\phi)^2 \\ &= \dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2\end{aligned}$$

· Esta es la forma covariante.

· ¿Y la dinámica?

$\rightsquigarrow$ ¡Euler-Lagrange!

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0$$

Esto nos lleva a:

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0}$$

Ecuación de Klein-Gordon.

¿Cómo llegamos a esto?

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \qquad \checkmark$$

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) = \partial_\nu \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi \right) \right)$$

¿Aquí qué?

¡PASOS IMPORTANTES!

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \right) = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi)} \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi \, \partial_\alpha \phi \right)$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \left(\delta^\nu_\mu \partial_\alpha \phi + \delta^\nu_\alpha \partial_\mu \phi \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi \right)$$

$$= \partial^\nu \phi$$

$$\Longrightarrow \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) = \partial_\nu \partial^\nu \phi$$

Esto nos lleva al resultado de arriba con $\nu = \mu$.

- Hasta ahora hemos construido un Lagrangiano para un campo escalar. Veamos sus soluciones:

- $\underline{\phi(x_\mu) = \cos(k_\mu x^\mu)}$

(Cuadri)Vector de onda.

Es solución mientras $k_\mu k^\mu = m^2$

con $k_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi$$

$$= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \cos(k_\nu x^\nu)$$

$$= \left(\eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha + m^2 \right) \cos(k_\nu x^\nu)$$

$$= \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha \left(\cos(k_\nu x^\nu) \right) + m^2 \cos(k \cdot x)$$

$$= -\eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \delta_\alpha^\nu \sin(k_\beta x^\beta) \cdot k_\nu + m^2 \cos(k \cdot x)$$

$$= -\eta^{\mu\alpha} k_\alpha \partial_\mu \sin(k_\beta x^\beta) + m^2 \cos(k\cdot x)$$

$$= \cdot\,\eta^{\mu\alpha} k_\alpha \cdot \delta^\beta_\mu k_\beta \cos(k_\rho x^\rho) + m^2 \cos(k\cdot x)$$

$$= -\eta^{\beta\alpha} k_\alpha k_\beta \cos(k_\rho x^\rho) + m^2 \cos(k\cdot x)$$

$$= -\underbrace{k^\beta k_\beta}_{m^2} \cos(k_\rho x^\rho) + m^2 \cos(k\cdot x)$$

$$= (-m^2 + m^2) \cos(k\cdot x) = 0 \quad \checkmark$$

- Sí, puede parecer engorroso, pero es importante estar al tanto de los índices.
- Estas son las soluciones de onda plana.
- Otra solución es con

$$\underline{\phi(x_\mu) = \sin(k_\mu x^\mu)}$$

Pero, ¡es lo mismo! ✓

Finalmente, tenemos :

$$\underline{\phi(x_\mu) = \exp(-i k_\mu x^\mu)}$$

· Se puede mostrar que también es solución a la ec. de KG.

Tarea.

Una combinación lineal de estas soluciones:

$$\boxed{\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[a(k_\mu)e^{-ik_\mu x^\mu} + b(k_\mu)e^{i(k_\mu x^\mu)}\right]}$$

⇝ $(2\pi)^4$: factor de normalización

a, b : coeficientes que miden la contribución de las ondas planas.

· Nota que:

KG admite sol. complejas

· Dado que ϕ es un campo real: $\phi = \phi^\dagger$

$\Rightarrow$

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[a(k_\mu)e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger(k_\mu)e^{i(k_\mu x^\mu)}\right]$$

Esto puede llevarse a la sig. forma:

$$\boxed{\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right)}$$

De tarea.

Heisenberg Picture

Nota que:

$$a(\vec{k}) \equiv \frac{a(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$a^\dagger(\vec{k}) \equiv \frac{a^\dagger(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

- Así es como obtenemos una solución en términos de ondas planas.

- Una forma alternativa:

  ↳ Expande el campo de KG:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{p},t)$$

La ec. de KG es:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2)\right]\phi(\vec{p},t) = 0$$

⇝ ec. de mov. para oscilador armónico simple con:

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}.$$

¡Ya sabemos encontrar su espectro!

Recordemos, el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \phi^2$$

Introduciendo a y $a^\dagger$:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a - a^\dagger)$$

Dado que tenemos $[\phi, p] = i$,

$$[a, a^\dagger] = 1$$

Finalmente, el Hamiltoniano es

$$H = \omega\left(a^\dagger a + 1/2\right)$$

¡Todo esto ya lo vimos! $(x \to \phi)$

Paso importante:

Tomemos esta idea para nuestro campo clásico.

y Cada modo es un oscilador indep.

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)}$$

Schrödinger Picture

El momento conjugado:

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)$$

Nota: Compara $\phi(\vec{x})$ con el resoltado obtenido de la otra manera;

¿En qué difieren?

¡Es importante notar las diferencias!

· En este caso, la regla de conmutacion es:

$$[a_{\vec{p}}, a^{\dagger}_{\vec{p}}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$$