

... continuación Oscilador Armónico.

Retomando el ejercicio:

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= \cancel{\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} - \frac{i}{2\hbar} x p + \frac{i}{2\hbar} p x + \cancel{\frac{1}{2m\omega\hbar} p^2} \\ &\quad - \cancel{\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} - \frac{i}{2\hbar} x p + \frac{i}{2\hbar} p x - \cancel{\frac{1}{2m\omega\hbar} p^2} \\ &= \frac{i}{\hbar} (px - xp) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [x, p] \rightarrow i\hbar \\ &= 1.\end{aligned}$$

Podemos utilizar este resultado para para reescribir la ec. de Schrödinger:

$$\begin{aligned}E\psi &= \frac{p^2}{2m} \psi + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi \\ &= \frac{1}{2m} \left(i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a) \right)^2 \psi \\ &\quad + \frac{\hbar\omega}{2} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \right)^2 \psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar\omega}{4} \left(-a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger + a a \right) \psi \\
&\quad + \frac{\hbar\omega}{4} \left(a a + a^\dagger a + a a^\dagger + a^\dagger a^\dagger \right) \psi \\
&= \frac{\hbar\omega}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \psi
\end{aligned}$$

Usando la regla de conmutación:

$$\begin{aligned}
E\psi &= \frac{\hbar\omega}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a) \psi \\
&= \frac{\hbar\omega}{2} (2 a^\dagger a + [a, a^\dagger]) \psi \\
&= \hbar\omega (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \psi
\end{aligned}$$

De aquí definimos el Hamiltoniano del sistema:

$$H \equiv \hbar\omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

Para los eigenestados de energía tenemos

$$H |E_1\rangle = E_1 |E_1\rangle$$

$\uparrow$
eigenvalor.
 $\nwarrow$ eigenestado

Antes de discutir la física, calculemos $[H, a]$:

$$\begin{aligned}[H, a] &= Ha - aH \\ &= \left(\hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \right) a \\ &\quad - a \left(\hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \hbar\omega (a^\dagger a - a a^\dagger) a \\ &= -\hbar\omega [a, a^\dagger] a \\ &= -\hbar\omega a.\end{aligned}$$

De manera análoga:

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$

¿Qué sucede si calculamos $\hat{H}(a|E_1\rangle)$?

$$\begin{aligned}\hat{H}(a|E_1\rangle) &= \left(\hat{H}a - a\hat{H} + a\hat{H} \right) |E_1\rangle \\ &= a\hat{H}|E_1\rangle + [\hat{H}, a]|E_1\rangle \\ &= (aE_1 - \hbar\omega a)|E_1\rangle\end{aligned}$$

$$= (E_1 - \hbar\omega) \underline{(a|E_1\rangle)}$$

Conclusión:

$$\hat{H}(a|E_1\rangle) = (E_1 - \hbar\omega)(a|E_1\rangle)$$

De manera análoga:

$$\hat{H}(a^\dagger|E_1\rangle) = (E_1 + \hbar\omega)(a^\dagger|E_1\rangle)$$

Si definimos: $|E_0\rangle \equiv a|E_1\rangle$
 $|E_2\rangle \equiv a^\dagger|E_1\rangle$

Nota: pon atención a la notación; puede resultar confusa.

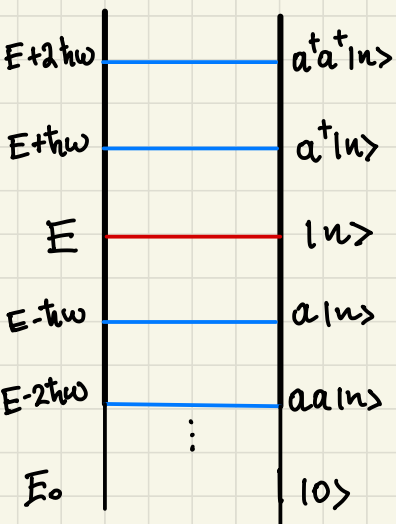
Reescribimos:

$$\begin{aligned}\hat{H}|E_0\rangle &= (E_1 - \hbar\omega)|E_0\rangle \\ \hat{H}|E_2\rangle &= (E_1 + \hbar\omega)|E_2\rangle\end{aligned}$$

Estos son los operadores de creación y aniquilación que nos ayudan a mover entre estados.

$a^\dagger$: creación

a : aniquilación



Si denotamos

$$N \equiv a^\dagger a$$

El Hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

El operador N nos dice en cuál estado nos encontramos

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

donde n etiqueta el n -eigenestado con energía E_n .

Convención: los estados se denotan por

$$|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |n\rangle$$

con $a^\dagger$ y a nos movemos entre estados.

Nota: también existe $|0\rangle$, el estado de menor energía:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

(Estado base o fundamental).

No es cero; siempre hay alguna fluctuación

→ El resto de los estados se generan a partir del estado base.

→ El espectro es discreto; la distancia entre estados es $h\nu$.

§1.4. Relatividad Especial

¿Por qué Relatividad Especial (RE)?

• Algunas razones:

- Altas velocidades y energías.
- Creación y aniquilación de partículas
- Causalidad.

• Es por esto que debemos hablar un poco sobre RE.

• Recordemos:

Espacio → Minkowski.

Métrica → $\eta_{\mu\nu}$. $(+1, -1, -1, -1)$ signature ↙

Eventos → Cuadrivector

Distancias → $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$.

¿Cómo se ve todo esto?

• El vector posición:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

¿Por qué c ?

→ Unidades.

$\mu = 0, 1, 2, 3$.

• El producto punto entre cuadvectores:

$$x \cdot x = x^\top \eta x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

$$= x^\mu x_\mu$$

} Distintas formas de escribirlo.

Si sumamos sobre μ :

$$\eta_{00} x^0 x^0 + \eta_{11} x^1 x^1 + \eta_{22} x^2 x^2 + \eta_{33} x^3 x^3$$

$$= x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$$

$$= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

⇒ "Distancia entre eventos"

• El covariante:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

Por ejemplo, $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^\mu &= \frac{1}{c} \partial_t A^0 + \partial_x A^1 + \partial_y A^2 + \partial_z A^3 \\ &= \frac{1}{c} \partial_t A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.\end{aligned}$$

¿Cuánto es ∂^μ ?

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \eta^{00} \partial_0 + \eta^{11} \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 + \eta^{33} \partial_3$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow; \mu=0 &\Rightarrow \partial_0 \\ \mu=1 &\Rightarrow -\partial_1 \\ \mu=2 &\Rightarrow -\partial_2 \\ \mu=3 &\Rightarrow -\partial_3\end{aligned}$$

Conclusión: $\boxed{\partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla})}$ $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$

• El cuadrimomento:

$$P_\mu = \left(\frac{1}{c} E, \vec{p} \right)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}P_\mu P^\mu &= \eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \\ &= P_0 P_0 - \vec{p} \cdot \vec{p} \\ &= \frac{1}{c^2} E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}\end{aligned}$$

· Por dimensionalidad tenemos que:

$$m^2 c^2 = \frac{1}{c^2} E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}$$
$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Relación
energía-momento.

Para terminar, recordemos los postulados de Einstein:

- 1) Las leyes de la física son las mismas para todos los obs. inerciales.
- 2) La luz se propaga a una velocidad c indep. de la vel. del obs.

§1.5. Herramientas Matemáticas

· Para estudiar TCC, necesitaremos de algunas funciones especiales.

Transformada de Fourier:

→ Toma una función y la expresa en términos de sus componentes de frecuencia.

Dada una función $f(t)$, su transf. $F(\omega)$ es:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$$

la inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{i\omega t}$$

¿Para que la queremos?

→ En TCC, los estados y operadores se representan en espacio de posición o momento (frecuencia).

posición $\longleftrightarrow$ momento
Fourier

Delta de Dirac:

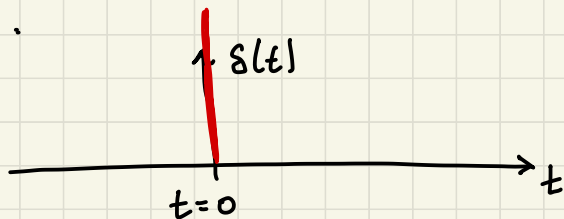
→ Toma un valor de la función en cierto punto.

Nota: no es función, es una distribución.

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) f(t) = f(0).$$

Esto es, $\delta(t)$ es cero en todos lados, menos en $t=0$.



Propiedades:

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) = 1$$

$$\cdot \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta'(t) f(t) = -f'(0).$$

Juntando Fourier con Delta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{-i\omega t} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} = 2\pi \delta(t).$$