· La semana pasada vimos que el conmutador de $\hat{x}$ y $\hat{p}$ es:

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}.$$

· Ahora, si utilizamos que $\hat{p}_i = -i\hbar\partial_i$ y aplicamos sobre el vector de estado:

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_i, \hat{x}_j]|\psi\rangle &= (\hat{p}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i)|\psi\rangle \\
&= (-i\hbar\partial_i\hat{x}_j + \hat{x}_j i\hbar\partial_i)|\psi\rangle \\
&= -i\hbar\partial_i\hat{x}_j|\psi\rangle \\
&\quad \cancel{- i\hbar\hat{x}_j\partial_i|\psi\rangle} \cancel{+ i\hbar\hat{x}_j\partial_i|\psi\rangle} \\
&= -i\hbar\delta_{ij}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

Dado que esto es válido para todo $|\psi\rangle$:

$$\boxed{[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = -i\hbar\delta_{ij}}$$

Esta es la relación de conmutación canónica.

· La siguiente pregunta es:
¿Cómo evoluciona el sistema?
⇝ Necesitamos algo tipo

$$\partial_t |\psi\rangle = \dots \text{ (Evolución temporal).}$$

· Si recordamos que $E = i\hbar\partial_t$, tenemos que:

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

· El siguiente paso es encontrar la forma explícita de la energía total del sistema.

· Recordemos que $E = T + V$, con

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

$$V = V(x)$$

Tenemos que:

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = (T+V)|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + V(x)\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{m} + V(\hat{x})\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_i)^2 + V(\hat{x})\right)|\psi\rangle$$

Esto nos lleva a:

$$\boxed{i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \left(-\frac{\hbar^2\partial_i^2}{2m} + V(\hat{x})\right)|\psi\rangle}$$

Ecuación de Schrödinger.

· Otra forma de escribirla es:

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

donde $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano.

· Una manera alternativa de estudiar la evolución de un sistema es con el operador de evolución temporal $\mathcal{U}(t)$

$$|\psi(t,x)\rangle = \mathcal{U}(t)|\psi(0,x)\rangle$$

Esto es, si conocemos $|\psi(0,x)\rangle$ y actuamos con $\mathcal{U}(t)$, encontraremos el sistema en un tiempo t.

· La forma explícita de este operador es:

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' H(t')}$$

i.e., dependerá del Hamiltoniano.

· Recordemos que diferentes operadores tienen distintos estados con un valor definido

$\rightsquigarrow$ eigenestados

Entonces,

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |O_i\rangle = a_1 |O_1\rangle + \dots$$

donde $|O_i\rangle$ son eigenestados del operador $\hat{O}$.

· La idea principal es:

¿Momento del sistema? $\longrightarrow$ Expande en eigenstates de momento.

¿Energía del sistema? $\longrightarrow$ Expande en eigenstates de energía.

· En el caso de un conjunto continuo:

$$|\psi\rangle = \int do \, a(o) \, |o\rangle$$

y si expandimos en eigenestados de posición:

$$|\psi\rangle = \int dx \, \psi(x) \, |x\rangle$$

donde $\psi(x)$ es la función de onda.

¿Qué pasa si quiero describir el sistema en la base de momentos?

→ Necesitamos un cambio de base

· Volvamos por un momento a Álgebra Lineal:

Ya vimos que los vectores base que utilizamos son:

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

y no son únicos.

De hecho, otra base igual de válida es:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- Regresando al ejemplo de la semana pasada,

$$\vec{v} = (1,3,5),$$

¿Cómo se ve este vector en la nueva base?

⇝ Tenemos que calcular "qué tanto" se extiende $\vec{v}$ en cierta dirección:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{v} = -\sqrt{2}$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{v} = 5$$

En la nueva base, $\vec{v}$ se escribe como

$$\vec{v} = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, 5\right)$$

Generalizando, tenemos que

$$\vec{v}_{nb} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{v})$$

nb = nueva base.

· Todo esto se aplica también en Mecánica Cuántica.

Por ejemplo, tenemos nuestro Ket en la base de momentos:

$$|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle,$$

y queremos pasarla a la de posición:

$$|\psi\rangle = c|x_1\rangle + d|x_2\rangle$$

¡Hay que calcularlas!

$|x_1\rangle$ partícula en x_1,

$|\psi_1\rangle$ " con momento p_1.

· Aplicando lo que vimos en vectores:

$$|\psi\rangle = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i|\psi\rangle$$

$$= |x_1\rangle\langle x_1|\psi\rangle + |x_2\rangle\langle x_2|\psi\rangle$$

$$\equiv c|x_1\rangle + d|x_2\rangle$$

donde c y d son las amplitudes de prob. en la base de posición.

$$c = \langle x_1|\psi\rangle$$

$$d = \langle x_2|\psi\rangle$$

Pasando al contínuo:

$$|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle\langle x|\psi\rangle$$
$$= \int dx\, \psi(x)\, |x\rangle$$

De aquí tenemos que:

$$\int dx\, |x\rangle\langle x| = 1.$$

Esta es la relación de completez.

- De hecho, podemos aplicar todo esto para trabajar con la ec. de Schrödinger en el espacio de posiciones:

$$i\hbar\, \partial_t \psi(x,t) = \hat{H}\, \psi(x,t)$$

Sin motivación alguna, propongamos la solución de una partícula libre:

$$\psi(x,t) = \exp\left[-i(Et - px)/\hbar\right]$$

Sustituyendo:

$$i\hbar\,\partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t)$$

$$i\hbar\,\partial_t \exp[-i(Et-px)/\hbar] = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \exp[-i(Et-px)/\hbar]$$

$$\vdots \qquad E=\frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{p^2}{2m}\exp[-i(Et-px)/\hbar] = \frac{p^2}{2m}\exp[-i(Et-px)/\hbar]$$

Sí es solución.

- De hecho, este resultado se puede comparar al de onda plana

$$\phi(x) = \exp[-i\,k_\mu x^\mu] = \exp[-i(k_0x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})]$$

Esto significa que:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k} \end{aligned}}$$

Hipótesis de de Broglie.

Lo que nos lleva a considerar a las partículas de materia como ondas; "dualidad onda-partícula"

· Para finalizar esta sección, vamos a ver cómo resolver la ec. de Schrödinger en un caso especial;

<u>potencial indep. del tiempo</u>.

· Para esto, vamos a proponer el siguiente Ansatz:

$$\Psi(x,t) = T(t)\,\psi(x)$$

donde $T(t)$ describe la evolución temporal.

· Entonces, tenemos:

$$i\hbar\,\partial_t\big(T(t)\,\psi(x)\big) = H\,T(t)\,\psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\,\frac{\partial_t\big(T(t)\big)}{T(t)} = \frac{H\big(\psi(x)\big)}{\psi(x)}$$

¡Derivada espacial!

De aquí concluimos que esta relación es válida solo si

$$i\hbar\,\frac{\partial_t\big(T(t)\big)}{T(t)} \equiv E \equiv \frac{H\big(\psi(x)\big)}{\psi(x)}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\,\partial_t\big(T(t)\big) = E\,T(t)$$

$$H\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

Conclusión: mientras V no dependa de t, la dependencia temporal será:

$$T(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right).$$

- La segunda ecuación,

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

es la ecuación de Schrödinger estacionaria.

- La solución completa será:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \psi(x) T(t) \\ &= \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.\end{aligned}$$

§1.3. Oscilador Armónico

- El estudio del oscilador armónico cuántico es escencial en la TCC.
- Aquí presentaremos un método alternativo para encontrar el espectro del sistema.
- El potencial es:

$$V(x) = \frac{1}{2} K x^2$$

donde K es la constonte del resorte.

Otra manera de escribirlo es:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

con $\omega = \sqrt{K/m}$ es la frecuencia de oscilación y m la masa al final del resorte.

· La ec. de Schrödinger estacionaria es:

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi$$

Ahora definimos dos operadores:

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\, P$$

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\, P$$

· Si despejamos:

$$a^\dagger + a = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^{+})$$

y

$$a - a^{+} = \frac{2i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\, P$$

$$\Rightarrow \quad P = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a - a^{+})$$

Si utilizamos $[x, p] = i\hbar$, podemos calcular:

$$[a, a^{+}] = \dots$$ (Ejercicio).

$$= 1.$$