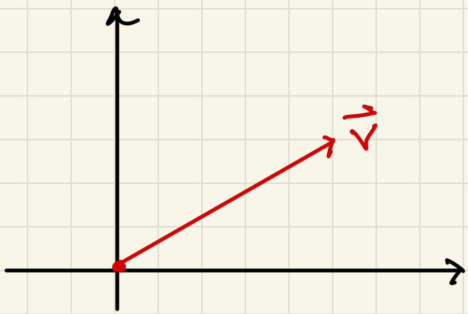
§1.2. Vectores

- La semana pasada vimos que los (cuadri-) vectores son importantes en Relatividad Especial. (¡ver repaso!)
- En esta sección entraremos en un poco más de detalle.
- Primero, un vector se encuentra en un punto en el espaciotiempo.
- Estamos acostumbrados a ver los vectores como:



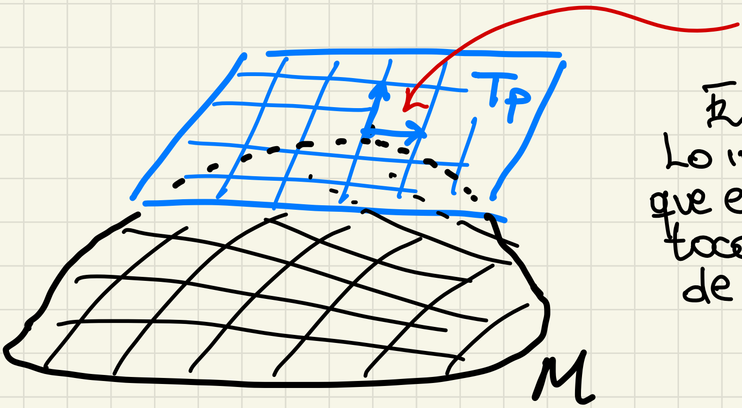
"Algo que va de un punto a otro"

- Esta noción se pierde si introducimos curvatura.

- Esta idea solo aplica para espacios planos, y funciona.
- Para generalizar esto, introducimos el conjunto llamado espacio tangente.

⇝ Es la colección de todos los vectores en un punto p del espaciotiempo.

- El espacio tangente en el punto p se denota por T_p
- Podemos verlo como:



El dibujo es feo. Lo importante es que el plano solo toca un punto de M.

- Aquí, M es una variedad (más de esto en otras clases).
- Por ahora, podemos ver a estos vectores como entes abstractos que cumplen

$$(a+b)(V+W) = aV + bV + aW + bW$$

con a, b escalares y V, W vectores.
(Cumple los axiomas de vector space).
- Nota que hasta ahora, no hemos definido una base.

- Una base es un conjunto de vectores que:

  ⤳ Generan el espacio.

  ⤳ Son linealmente independientes.

- El número de vectores necesarios es la <u>dimensión</u> del espacio.

- Tomemos ahora una base para T_p:

$$\hat{e}_\mu \quad , \quad \mu = 0,1,2,3 .$$

Esta base está relacionada al sistema coordenado x^μ.

  ⤳ $\hat{e}_1$ apunta sobre x.

- Entonces, cualquier vector A:

$$\boxed{A = A^\mu \hat{e}_\mu} \, ,$$

donde A^μ son las componentes de A.

- Por lo general, a lo que llamamos vector, es A^μ, sabiendo que son sus componentes.

- Ahora, un ejemplo.

Considera el vector tangente a una curva parametrizada por λ, donde las coordenadas

$$x^\mu = x^\mu(\lambda).$$

Entonces, el "vector" tangente es:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \qquad \left(V = V^\mu \hat{e}_\mu \right)$$

- ¿Cómo transforman las componentes?

$$V^\mu \longrightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu V^\nu. \quad \text{(Lorentz)}$$

- Recuerda que el vector V es invariante, i.e., no cambia.
- Ya sabemos cómo transforman las componentes

¿Y los vectores base?

- Nos aprovechamos del hecho de que V es invariante:

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu \overset{!}{=} V^{\nu'} \hat{e}_{\nu'}$$

¡Igual en ambos sistemas!

$$= \underbrace{\overset{*}{\Lambda^{\nu'}{}_{\mu} V^{\mu}}}_{\text{ya lo sabíamos.}} \hat{e}_{\nu'}$$

¿Cómo transforma?

Dado que esta relación es válida para todo valor de las componentes:

$$\hat{e}_{\mu} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} \hat{e}_{\nu'} \quad *$$

Ahora definimos la inversa como:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \quad , \quad \Lambda^{\sigma'}{}_{\tau} \Lambda^{\tau}{}_{\lambda'} = \delta^{\sigma'}_{\lambda'}$$

Esto nos lleva a escribir la regla de transformación para vectores base:

$$\hat{e}_{\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \hat{e}_{\mu} \qquad *$$

Nota: Para pasar de un sistema a otro, multiplicamos por la inversa de $\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}$.

Para denotar la inversa, cambiamos el orden de los índices:

$$\Lambda^{\nu'}{}_{\mu} \longrightarrow \Lambda^{\rho}{}_{\sigma'}$$

¡Cambia el lugar del índice primado!

¿Cómo funciona esto?

Por ejemplo, tenemos:

inversa

$$\hat{e}_{\mu} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\, \hat{e}_{\nu'}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma'}\, \hat{e}_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma'} \Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\, \hat{e}_{\nu'}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma'}\, \hat{e}_{\mu} = \delta_{\sigma'}{}^{\nu'}\, \hat{e}_{\nu'}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma'}\, \hat{e}_{\mu} = \hat{e}_{\sigma'}$$

← Ya sabíamos esto de $*$.

· Perfecto, ya tenemos todo. Transformemos todo el vector (componentes y base).

$$V = V^{\mu} \hat{e}_{\mu} \longrightarrow V^{\mu'} \hat{e}_{\mu'}$$

Componentes:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} V^{\alpha}$$

Base:

$$\hat{e}_{\mu'} = \Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\, \hat{e}_{\beta}$$

Finalmente:

$$V^{\mu'} \hat{e}_{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} V^{\alpha} \Lambda^{\beta}{}_{\mu'}\, \hat{e}_{\beta}$$

$$= \delta^{\beta}_{\alpha} V^{\alpha} \hat{e}_{\beta}$$

$$= V^{\beta} \hat{e}_{\beta}$$

$$= V^{\mu}\hat{e}_{\mu} \quad \text{(renombrando)}$$
$$= V$$

conclusión: el vector V es invariante.

· Todo esto ya lo habíamos visto, solo que en $\mathbb{R}^3$ y sus matrices de rotación; esto es más general.

§1.3. Vectores Duales

· Una vez definido T_p, podemos definir un espacio vectorial asociado llamado espacio cotangente

· Este espacio se denota por T_p^* y es un mapeo de vectores a $\mathbb{R}$.

· Si $\omega \in T_p^*$ es un vector dual, entonces

$$\omega(aV+bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbb{R}.$$

· Al igual que con los vectores, introducimos una base con la sig. condición:

$$\hat{\theta}^{\nu}\hat{e}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

donde $\hat{\theta}^{\nu}$ son la base de los vectores duales.

Entonces, un vector dual lo escribimos como:

$$\boxed{\omega = \omega_{\mu}\hat{\theta}^{\mu}.}$$

Tenemos que:

$V^{\mu} \longrightarrow$ Vector contravariante,

$\omega_{\mu} \longrightarrow$ Vector covariante.
(uno-formas) ¡Más de esto pronto!

Si queremos ver cómo actúa la uno-forma sobre el vector:

$$\begin{aligned}
\omega(V) &= \omega_{\mu}\hat{\theta}^{\mu}V^{\nu}\hat{e}_{\nu} \\
&= \omega_{\mu}V^{\nu}\hat{\theta}^{\mu}\hat{e}_{\nu} \\
&= \omega_{\mu}V^{\nu}\delta^{\mu}_{\nu} \\
&= \omega_{\mu}V^{\mu} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(producto punto)

· De igual forma podríamos escribir:

$$V(\omega) \equiv \omega(V) = \omega_\mu V^\mu,$$

lo que significa que el espacio dual del espacio cotangente es el espacio tangente.

· Nota: en el caso que un campo vectorial dual actúe sobre un campo vectorial, el resultado será una función escalar.

· Al igual que con vectores, tenemos las reglas de transformación:

Componentes:

$$\omega_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\,\omega_\nu ,$$

Base:

$$\hat{\theta}^{\rho'} = \Lambda^{\rho'}{}_{\sigma}\,\hat{\theta}^{\sigma}$$

· Un ejemplo de covector es el gradiente. Si tomamos ϕ, una fn. escalar:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\,\hat{\theta}^\mu$$

También escrito como: $\partial_\mu \phi$ y $\phi_{,\mu}$.

donde d denota el gradiente.

Para aterrizar esta idea, considera el potencial gravitacional de la Tierra

$$\phi = \phi(x, y, z).$$

El campo gravitacional es:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi.$$

Si consideramos un cuerpo de masa m moviéndose a velocidad $\vec{v}$ (tangente) en este campo.

¿Cuál es el trabajo realizado?

$$W = -\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{\text{covector}} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{vector tangente}}$$

El resultado es un número.