Teoría Cuántica de Campos

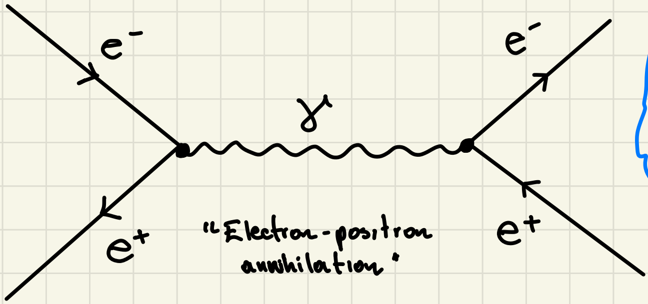
Unidad 1. Teoría Clásica de Campos.

- ¿Qué es la Teoría Cuántica de Campos (TCC)?

De forma resumida:

$$\text{TCC} = \text{Mecánica Cuántica} + \text{Relatividad Especial.}$$

- Esta teoría se utiliza para describir la interacción entre partículas, así como su creación y aniquilación.
- Es también el lenguaje de una de las teorías más importantes: El Modelo Estándar.
- Al final de este curso, sabremos cómo interpretar y calcular cosas como:



Esto es un diagrama de Feynman, que en realidad es una ecuación.

- Para lograr esto, haremos uso de campos. Algunos de ellos ya los conocemos; eléctrico, magnético, gravitacional, etc.
- Aquí entraremos en un poco más de detalle.

Pero primero, algo de Mecánica Clásica.

§1.1. Dinámica Clásica.

- En esta sección veremos algunos de los resultados importantes de la Mecánica Clásica.

❗ Disclaimer: Este no es un curso sobre este tema, por lo que nos brincaremos las derivaciones. ❗

- El objetivo es entender los siguientes conceptos:

Bases para TCC :
- Lagrangiano
- Hamiltoniano
- Principio de mínima acción
- Acción

- Veamos qué son y cómo se relacionan.

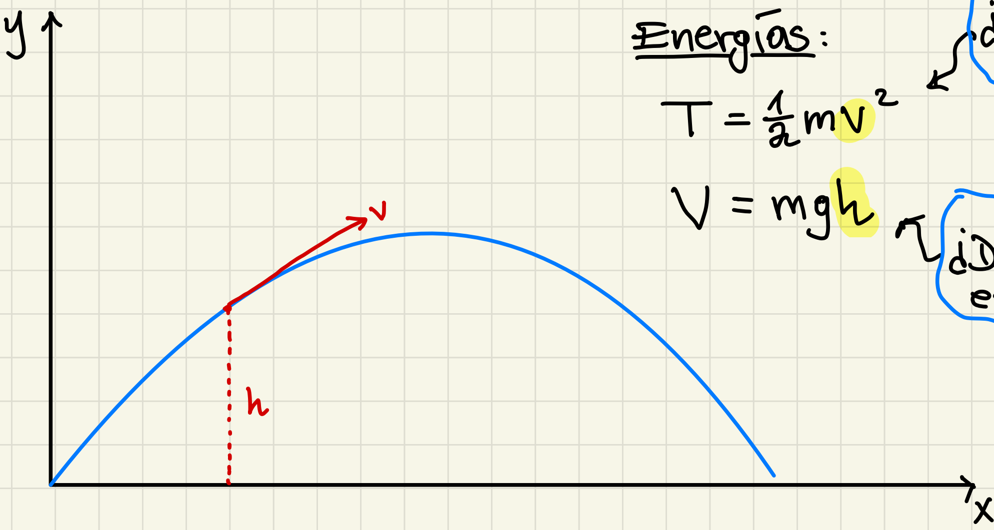
· Primero una definición:

"La Mecánica Lagrangiana es una formulación de la Mecánica Clásica que se basa en el principio de mínima acción y donde las energías se utilizan para describir el movimiento."

· Ahora bien, ¿Qué es el Lagrangiano?

Comenzaremos con una afirmación:

→ Para conocer la trayectoria de un objeto, solo es necesario conocer su posición y velocidad en cierto instante.



Energías:

$T = \frac{1}{2} m v^2$ ¿Adónde va?

$V = mgh$ ¿Dónde está?

· Para predecir la trayectoria de un objeto, solo necesitamos conocer:

energía cinética (T) y potencial (V)

- Motivados por esta observación, definimos el Lagrangiano como:

$$\boxed{L = L(T, V),}$$

que es una función de las energías.

- Para aplicar este resultado, hacemos uso de la acción, que describe una trayectoria específica del cuerpo.

=> Cada trayectoria en el espacio tiempo tiene una acción asociada.

Entonces, si sumamos las energías sobre cada punto de la trayectoria obtendremos la acción:

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} L(T, V)\, dt}$$

¿Y ahora qué? ¿Dónde está la dinámica y las ecuaciones de movimiento?

⇝ Todo esto se obtiene del

principio de mínima acción.

· Una consecuencia de este principio son las ecuaciones de Euler-Lagrange.

· Pero primero, ¿Qué dice este principio?

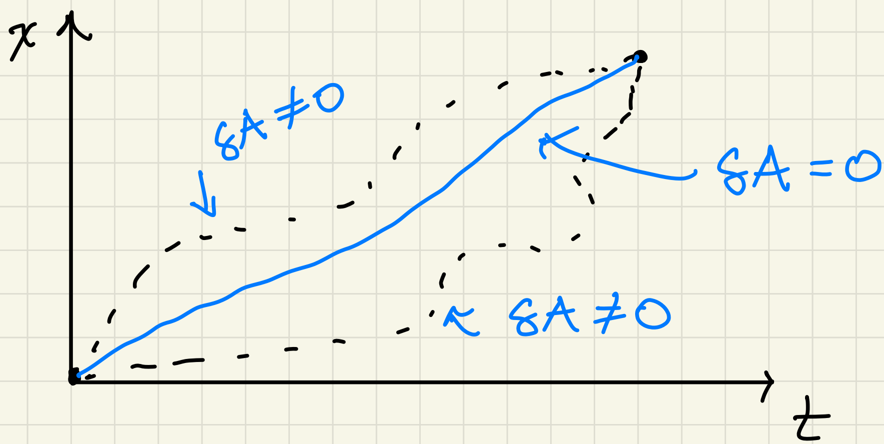
"El camino tomado por un sistema físico entre dos puntos será el que minimice la acción."

· Matemáticamente, esto se escribe como:

$$\delta A = 0$$

delta

De hecho, δ es una derivada funcional dado que A, la acción, es un funcional (función de funciones).



Conclusión: ¡El camino real es dado por $\delta A = 0$!

· ¿Y el Lagrangiano?

- En mecánica clásica, el Lagrangiano tiene la siguiente forma:

$$\boxed{L = T - V}$$

<u>Nota</u>: ¡No es la energía total!

Esta forma del Lagrangiano permite estudiar su cambio en el tiempo (¡$T+V$ = cte!).

· O.K., hasta ahora mucho texto;

¿Y la física?

· Dijimos que todo sale de $\delta A = 0$, entonces:

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(T,V)\,dt \overset{!}{=} 0$$

Esto se satisface si:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0}$$

La derivación queda para el curso de Mecánica Clásica.

Euler - Lagrange.

· En palabras, para que la acción sea estacionaria, el Lagrangiano debe obedecer la Ec. de Euler-Lagrange.

Nota: Esto es para cualquier Lagrangiano.

· Si tomamos $L = T - V$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(T-V)}{\partial x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}}_{\text{Algo con unidades de momento}} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

· Se podría decir que obtuvimos algo tipo:

$$\text{Fuerza} = -\frac{d}{dx}(\text{Potencial})$$

Conclusión: recuperamos la Mecánica que ya conocemos. Esto es:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Veamos explícitamente cómo:

Toma $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$.

· Lo ponemos en las ec. de E-L:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}2m\dot{x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-V(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\frac{\partial V(x)}{\partial x}}_{\text{Fuerza.}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad \checkmark$$

· Esto es solo un ejemplo de muchos en Mecánica.

Otros:

$$L = \sqrt{-g}\,R \quad \leftarrow \text{Relatividad General}$$

$$L = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad \leftarrow \text{Fermiones (luego lo veremos).}$$

- Hay otro approach aparte de utilizar el Lagrangiano para describir la dinámica.

⇝ Mecánica Hamiltoniana

- Junto con el Lagrangiano, estos son los dos 'approaches' más usados.
- ¿Por qué lo necesitamos?

→ En pocas palabras, para cuantizar los campos clásicos.

- ¿Cómo se define?

Primero, recordemos que el Lagrangiano es:

coordenadas generalizadas.

$$L = L(q_i, \dot{q}_i).$$

Ahora, el Hamiltoniano será una función de q_i y p_i,

$$H = H(q_i, p_i),$$

con

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

¿Cómo se ve?

- El Hamiltoniano se define como:

$$\boxed{H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L}$$

Entonces, H se define en términos de L tras hacer una transf. de Legendre.

Nota: los detalles en tu curso de Clásica.

¿Qué es?

Considera el Lagrangiano

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$$

El momento generalizado $p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv$

- Calculamos el Hamiltoniano:

$$H = \sum \dot{q} p - L = v \cdot mv - \left(\frac{1}{2}mv^2 - V(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

cinética + potencial

¡Energía total!

¿Y la dinámica?

Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

⤳ Nos dicen cómo evoluciona un sistema en términos de su posición y momento.

¿Mecánica cuántica?

Para convencernos de que sí funcionan, toma

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

entonces:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \checkmark$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} \; ; \; p = mv \checkmark$$

Toma ahora un péndulo simple:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta .$$

Nuestra coord. gen. es θ.

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad (1)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{-\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad (2)$$

Ecuaciones acopladas

Entonces, tomemos (1) y tomemos su derivada temporal:

$$\dot{p}_\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

e insertamos en (2):

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta} \quad ✓$$

Mismo resultado si usamos Euler-Lagrange.

§ 1.2. Mecánica Cuántica

- En esta sección tocaremos los puntos escenciales para nuestro curso.
- En Mecánica Cuántica, el objeto fundamental que describe un sistema es el vector de estado $|\psi\rangle$.
- Para extraer información de $|\psi\rangle$, aplicamos operadores.

Por ejemplo, para obtener el momento:

$$\hat{p}\,|\psi_1\rangle = p_1\,|\psi_1\rangle$$

- Dado que al aplicar $\hat{p}$ podemos obtener distintos resultados, escribimos

$$|\psi\rangle = a\,|\psi_1\rangle + b\,|\psi_2\rangle + \dots ,$$

donde $|\psi_1\rangle$ tiene momento p_1, $|\psi_2\rangle$ momento p_2, and so on.

- Los coeficientes $a, b, \dots$ están relacionados a la probabilidad de medir $p_1, p_2, \dots$

$\rightsquigarrow$ $|a|^2$ = prob. de medir p_1

· Los estados con momento definido se les llama eigenestados.

$|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ son ejemplos en este caso.

· Una analogía: un vector lo escribimos en términos de los vectores base.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

· Si tenemos $\vec{v} = (1, 3, 5)$

$$= \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 .$$

¿Y los observables del sistema?

· Necesitamos definir el valor esperado, definido con ayuda de

$$\langle \psi | \equiv |\psi\rangle^{\dagger} = (|\psi\rangle^{*})^{T},$$

de la sig. forma:

$$\underbrace{\langle \psi |}_{\text{bra}} \hat{O} \underbrace{| \psi \rangle}_{\text{Ket}}$$

con $\hat{O}$ un operador.

· Esta operación es un producto punto entre dos vectores abstractos

$$\langle \psi | \psi \rangle .$$

Por ejemplo, para dos vectores

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = v_1 \cdot v_2 \quad ; \quad \langle v_1 | = v_1^T$$ "Renglón por columna"

· Adicionalmente, podemos calcular la prob. de medir un valor específico.

⇝ La prob. de medir p_1 es $|\langle \psi_1 | \psi \rangle|^2$.

· De nuevo, esto es análogo a cuánto un vector se extiende en cierta dirección:

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{v} = \vec{e}_3^{\,T} \vec{v} = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 .$$

o también,

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 \cdot \vec{v} &= \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3) \\ &= \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + 5\,\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \\ &= 5 . \end{aligned}$$

Estos vectores abstractos viven en el espacio de Hilbert.

· Sin motivación alguna, introducimos los operadores de momento y energía:

$$\hat{P}_i = -i\hbar\partial_i$$
$$\hat{E} = i\hbar\partial_t$$

generadores de traslaciones

espacio y tiempo

con $\hbar$ siendo la constante de Planck que codifica los efectos cuánticos.

· En Mecánica Cuántica hay una incertidumbre inherente:

"El momento cambia cada que medimos la posición y viceversa"

$$\rightsquigarrow \quad \hat{x}\hat{p}|\psi\rangle \neq \hat{p}\hat{x}|\psi\rangle$$

o $$(\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x})|\psi\rangle \neq 0$$

$$[\hat{x},\hat{p}]|\psi\rangle \neq 0.$$

donde

$$[\hat{x},\hat{p}] \equiv (\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x})$$

es el conmutador.