Relatividad General y Cosmología

Unidad 1. Relatividad Especial

- La Relatividad General (RG) es la teoría del espacio, tiempo y gravitación.
- La idea principal del trabajo de Einstein es la siguiente.

  - Mientras que las fuerzas fundamentales se representan por medio de campos en un espaciotiempo, la gravedad se encuentra en el espaciotiempo.

Ejemplo: Teoría Electromagnética
Fotones + leptones.

⇝ Esto es Teoría Cuántica de Campos.

$$: \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

(Está de optativa también).

· Entonces, lo que experimentamos como gravedad no es más que la manifestación de la curvatura del espacio tiempo.

· Nuestro objetivo es claro, estudiar:

- Espaciotiempo.
- Curvatura.
- Espaciotiempo + Curvatura

=

Gravedad.

· Al final del curso, sabremos leer la famosa ecuación de Einstein:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}}$$

· Pero primero, espaciotiempo.

§1.1. Transformaciones de Lorentz

· En este curso, tomaremos al espacio y al tiempo como una misma entidad:

espaciotiempo

¿Por qué?

⇝ Relatividad Especial

- De hecho, está comprobado experimentalmente. Ejemplo, la electrodinámica.

- Definamos entonces lo que es:

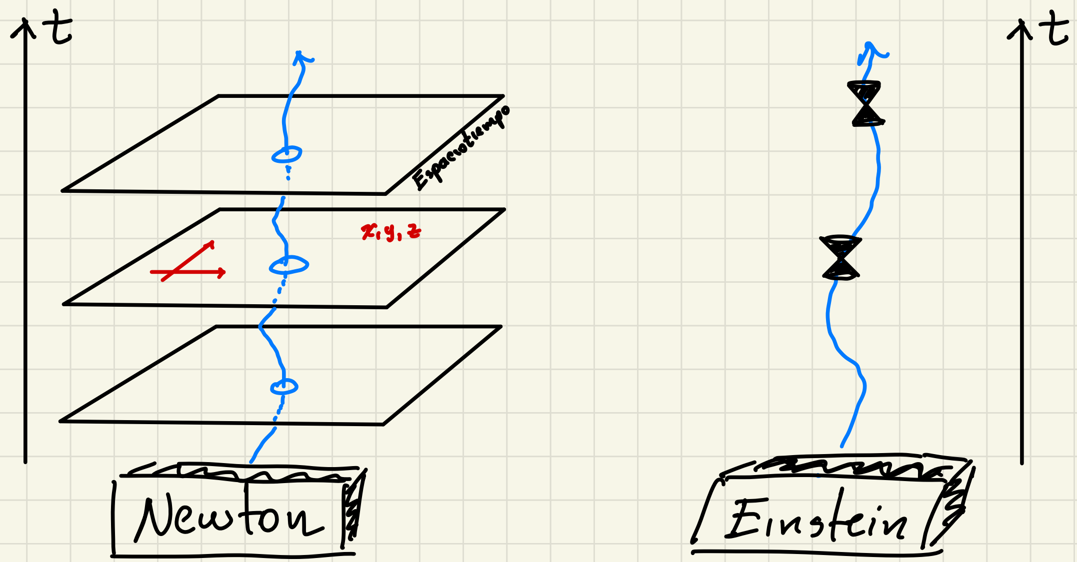
→ El espaciotiempo es un conjunto cuadri-dimensional, con elementos "etiquetados" por tres coordenadas espaciales y una temporal.

→ Un punto en el espaciotiempo se le llama evento.

→ El camino recorrido por un cuerpo a través del espaciotiempo se le llama línea de mundo.

- Una distinción importante entre Newton y Rel. Esp. es la de simultaneidad.

	Dos eventos al mismo tiempo.
Newton:	¡No hay problema!
Einstein:	Lea postulados uno y dos. ⇝ ¡luz!



· En RE decimos que:

"No existe la noción absoluta de todo el espacio en un instante de tiempo"

tiempo
$\updownarrow$
espacio

· Es aquí de donde se derivan todas las consecuencias y aplicaciones de RE:

⇝ La relatividad de lo simultáneo.

· De esta observación es que podemos construir las famosas transf. de Lorentz.

¿Qué hacen?

⇝ ¡Comunicar obs. inerciales entre sí!

- Antes de entrar en detalle, ¿Cómo trabajamos sobre el espaciotiempo?
- Primero, la "distancia" entre eventos viene dada por el intervalo relativista:

$$\boxed{\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Nota: En este curso tomaremos la notación $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

- Esta expresión es simplemente una generalización de distancia en el espacio. $(\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$.
- Conclusión: mediciones en el espaciotiempo necesariamente involucran espacio y tiempo (¡doh!).
- El espacio que obedece esta métrica es el de Minkowski.
- Segundo, necesitamos introducir una generalización de los vectores: cuadrivectores.

→ Posición en el espaciotiempo:

índice griego

$$x^{\mu}: \quad \begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z. \end{aligned}$$

(¡no son exponentes!)

Nota que el índice griego toma valores

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

mientras que el latino

$$i = 1, 2, 3 .$$

- La métrica se define como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} .$$

- Entonces, el intervalo relativista lo podemos reescribir como:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

- Aquí utilizamos la notación de Einstein.
- De hecho, es más conveniente si utilizamos intervalos infinitesimales:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

- Esto, en resumen, es como podemos categorizar el espaciotiempo.

- Ahora, introduzcamos observadores al espaciotiempo.
- Estamos interesados en cómo obs. inerciales se comunican.

$\Longrightarrow$ Transf. que dejen ds^2 invariante.

- La más sencilla son las traslaciones

$$x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\mu}(x^{\mu} + a^{\mu}),$$

donde a^{μ} son números y $\delta^{\mu'}_{\mu}$ es la Delta de Kronecker:

$$\delta^{\mu'}_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \mu' \\ 0 & \text{si } \mu \neq \mu' \end{cases}$$

- La traslación es un "shift" en el espacio-tiempo. (sumarle una constante a tu posición)

Esta es una transformación relativamente trivial. (a^{μ} es constante).

$$ds'^2 = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$$

$$= \eta_{\mu'\nu'} \delta^{\mu'}_{\mu} d(x^{\mu} + a^{\mu}) \delta^{\nu'}_{\nu} d(x^{\nu} + a^{\nu})$$

$$= \eta_{\mu'\nu'} \delta^{\mu'}_{\mu} \delta^{\nu'}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$= \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$= ds^2$$ ✓ ¡Invariante!

- Las otras transformaciones relevantes son:
  - Rotaciones
  - Boosts

→ Las rotaciones son simplemente rotaciones en el espacio (no tiempo).

→ Los boosts son diferencias de velocidad entre observadores.

- En ambos casos, el cuadrivector posición será multiplicado por una matriz de transf:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^{\nu}$$

o de forma matricial:

$$x' = \Lambda x.$$

¿Cómo se ve el intervalo relativista ante esta transf.?

$$\Delta s'^2 = (\Delta x')^T \eta \, \Delta x'$$
$$= (\Lambda \Delta x)^T \eta \, \Lambda \Delta x$$
$$= (\Delta x)^T \underbrace{\Lambda^T \eta \, \Lambda}\, \Delta x \quad \overset{!}{=} ¿\Delta s^2?$$

· ¿Qué necesitamos para que se mantenga invariante?

$$\eta = \Lambda^T \eta \, \Lambda$$

o en notación de índices:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \, \eta_{\alpha'\beta'} \, \Lambda^{\beta'}{}_{\nu}$$
$$= \eta_{\alpha'\beta'} \, \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \Lambda^{\beta'}{}_{\nu}$$

Nota:

· En notación de índices el orden de las matrices es irrelevante.

· Conclusión: hay que encontrar $\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}$ tal que las comp. de $\eta_{\mu\nu}$ y $\eta_{\alpha'\beta'}$ sean iguales.

- Las matrices que satisfacen la condición $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ son llamadas **transformaciones de Lorentz.**
- El conjunto de estas matrices forma el **grupo de Lorentz**.

Este grupo es similar al de $SO(3)$, que cumple

¡matrices de rotación!

$$R^T R = \mathbb{1}_{3\times3},$$
$$\det R = 1.$$

De hecho, podemos escribir

$$\mathbb{1}_{3\times3} = R^T \mathbb{1}_{3\times3} R,$$

análogo a $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$.

- Entonces, la diferencia está en reemplazar $\mathbb{1}_{3\times3}$ $(+1, +1, +1)$ por η $(-1, +1, +1, +1)$

$$\mathbb{1}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbb{1}_{3\times3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Euclidiana   Lorentziana.

· ¿Cómo se ve $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$?

Para empezar, podemos escribir una expresión para una rotación en x-y:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde θ es periódico en 2π. Las otras transf. se pueden escribir de forma similar.

¿Y los boosts?

⇝ Son rotaciones entre espacio y tiempo.

Por ejemplo, un boost en la dirección x se escribe:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ϕ toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$.

· Para relacionarlo a algo que ya conocemos, la transf. para t' y x' es:

$$t' = t\cosh\phi - x\sinh\phi$$
$$x' = -t\sinh\phi + x\cosh\phi.$$

Podemos ver que $x'=0$ se mueve con vel.:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi$$

Si reemplazamos $\phi = \tanh^{-1} v$:

$$t' = \gamma(t - vx),$$
$$x' = \gamma(x - vt),$$

con $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$.

Estas son las transf. de Lorentz que ya conocemos.

· Hasta ahora tenemos translaciones y transf. de Lorentz. Ambas forman el grupo de Poincaré.

Resumen de la semana

- Repasamos Relatividad Especial
- Eventos se representan por cuadrivectores
- El grupo de Lorentz:

  Rotaciones + Boosts

- El grupo de Poincaré

  Lorentz + traslaciones.