

4. Tensor de Einstein

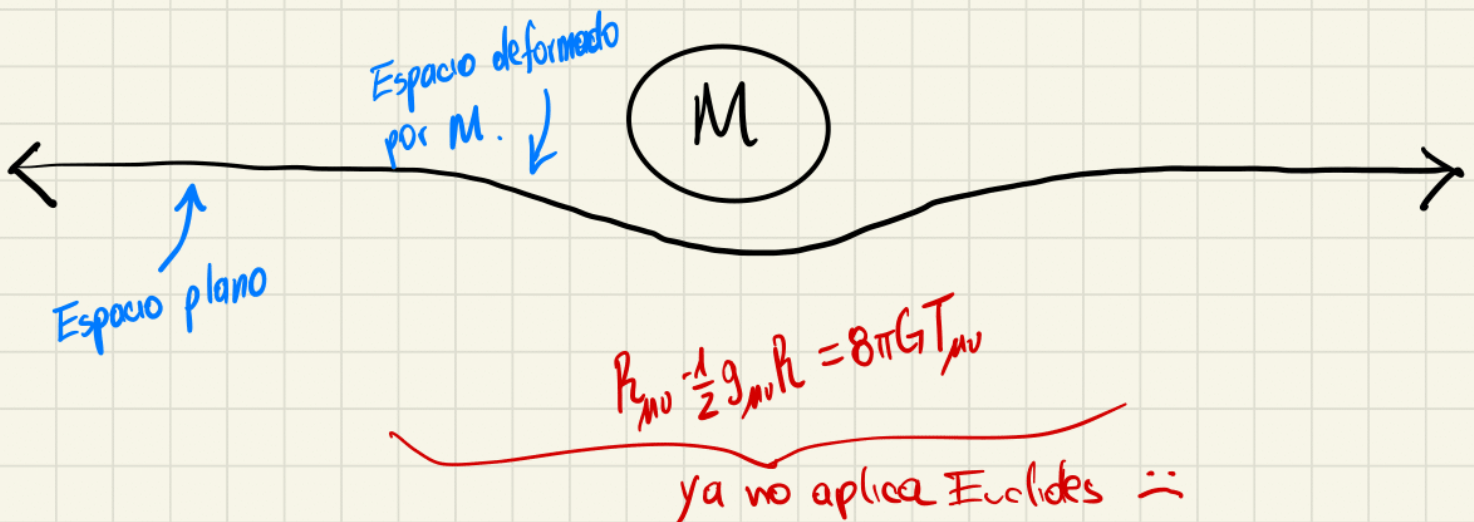
En Relatividad General se trabaja la mayor parte del tiempo con el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

Se utiliza para describir la curvatura de una variedad pseudo-Riemanniana (no importante ahora).

De hecho, las ecuaciones de campo de Einstein para gravitación son:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}_{\text{Geometría del espaciotiempo}} = 8\pi G \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{Distribución de materia.}}$$



$R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci.

Nota: por ahora no es importante saber lo que significa cada componente de la ecuación. Todo esto se cubrirá en un futuro curso de Relatividad General.

$g_{\mu\nu}$ es la métrica.

R es el escalar de Ricci.

G es la constante de Gravitación.

$T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

Esto nos basta para describir a los agujeros negros, ondas gravitacionales y cómo la luz se desvía de su camino en el vacío, por mencionar algunos.

El objetivo ahora no es estudiar a fondo esta ecuación. Lo que sí podemos hacer es aplicar lo que hemos aprendido hasta ahora.

• Por ejemplo, podemos jugar con ella: sin lastimar su corazón.

Toma $g^{\mu\nu}$ y aplícalo a ambos lados de la ecuación:

$$\underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_{= R} - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{= 4} R = 8\pi G \underbrace{g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}}_T$$

$$\Rightarrow R - 2R = 8\pi GT$$

$$R = -8\pi GT$$

Tomemos R y substituyamos en la ec. original:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-8\pi G T) = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)}$$

Esta es la forma "trace-reversed" y es conveniente en ciertos casos especiales.

Aquí tomamos que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \leadsto g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= g^{00} g_{00} + g^{11} g_{11} + g^{22} g_{22} + g^{33} g_{33} \\ &= (-1)(-1) + 1 + 1 + 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

5. Tensor de Faraday

- Otra aplicación interesante de los tensores es en el electromagnetismo.
- De hecho, las ec. de Maxwell pueden ser escritas de manera compacta como:

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad J^\nu = (c\rho, \vec{J}) \quad (1)$$

$$\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} = 0 \quad (2)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday

De la ecuación (1) podemos obtener:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

De (2):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Está claro que una de las ventajas de utilizar $F_{\mu\nu}$ es que todo el electromagnetismo está codificado en este tensor.

Explicitamente,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

donde A_μ es el cuádripotencial electro-magnético definido como:

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A} \right).$$

Con esto, podemos construir $F^{\mu\nu}$:

i contravariante!

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

i covariante!

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

• Esto significa que las componentes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ pueden escribirse como:

$$E_i = c F_{0i} \quad , \quad B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}.$$
$$\vec{E}^i = -c F^{0i}$$

• Veamos ahora si podemos sacar las ec. de Maxwell de (1) y (2):

Ec (1):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \partial_1 F^{1\nu} + \partial_2 F^{2\nu} + \partial_3 F^{3\nu}$$

Tomemos $\nu=0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} &= \cancel{\partial_0 F^{00}} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(+\frac{E_x}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(+\frac{E_y}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(+\frac{E_z}{c} \right) \\ &= +\frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{E} \\ &\stackrel{!}{=} \mu_0 J^0 = \mu_0 (c \rho) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \rho / \epsilon_0 \quad \checkmark$$

Tomemos $\nu = i$:

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji}$$

$$= \frac{1}{c} \partial_t \left(-\frac{E^i}{c} \right) + \partial_j \epsilon^{ijk} B_k$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E^i + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k$$

$$\stackrel{!}{=} \mu_0 J^i$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \checkmark$$