

2. Vectores

2.1. Vectores contravariantes

• Supón que V es un campo vectorial definido en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y supón que x^i y $\bar{x}^i$ son dos sistemas de coordenadas relacionados por la transformación T :

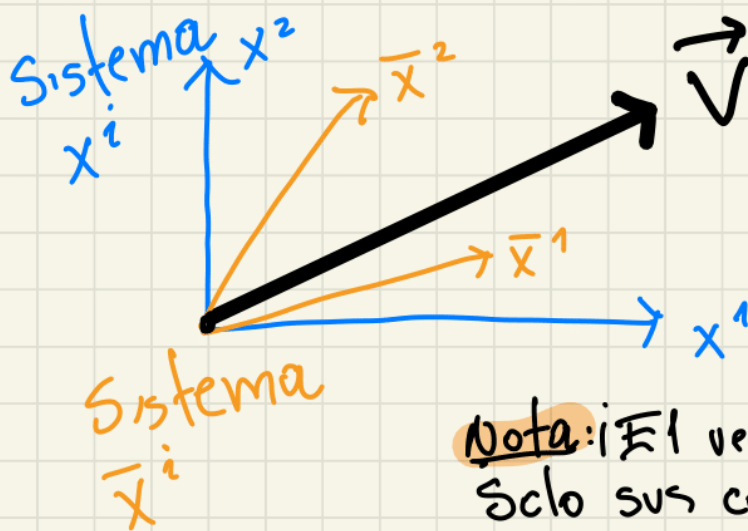
$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

Nota: piensa en la trans. entre cartesianas y polares

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ \bar{x}^2 &= \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right)\end{aligned}$$

• **Vector contravariante**: El campo vectorial V se dice que es un tensor contravariante de rango 1 si sus componentes V^i en el sistema x^i y las componentes $\bar{V}^i$ en el sistema $\bar{x}^i$ están relacionadas por:

$$\bar{V}^i = V^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad (1 \leq i \leq n)$$



Nota: ¡El vector $\vec{V}$ no cambia!
Solo sus componentes.

· Ejemplo: Supón que $\gamma: [x^1, \dots, x^n]$ es una curva paramétrica donde $x^i = x^i(t)$ y $a \leq t \leq b$ $1 \leq i \leq n$. El vector tangente a γ es Θ definido

$$\Theta^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

· Si aplicamos la transformación T , la curva transforma como:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(t) = \bar{x}^i(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

· Los componentes del vector tangente en $\bar{x}^i$ son:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}^i &= \frac{d\bar{x}^i}{dt} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \dots \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \\ &= \Theta^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{\Theta}^i = \Theta^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

El vector tangente Θ es un tensor contravariante de rango 1.

2.2. Vectores covariantes

• Supón que U es un campo vectorial definido en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y supón que x^i y $\bar{x}^i$ son dos sistemas coordenados relacionados por la transformación T :

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

• **Vector covariante**: El campo vectorial U se dice que es un tensor contravariante de rango 1 si sus componentes u^i en el sistema x^i y las componentes $\bar{u}^i$ en el sistema $\bar{x}^i$ están relacionadas por:

$$u_i = u_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

• Ejemplo: Supón que $F(x) = F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ es un campo escalar definido en un sistema x^i sobre $\mathbb{R}^n$. El gradiente de F es:

$$\begin{aligned} \nabla F &= \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n} \right) \\ &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{con } u_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Si aplicamos la transformación T , el gradiente de F será:

$$\nabla \bar{F} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x^1}, \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^n} \right)$$

Las componentes en el sistema $\bar{x}^i$ serán

$$\bar{u}_i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^i}$$

$$= \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} + \dots$$

$$= \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \quad \left(\text{Aquí: } \bar{F} = F, \text{ campo escalar} \right)$$

$$= \frac{\partial \bar{F}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{u_i = u_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}}$$

$\bar{F}$ / gradiente
transforma como
un vector cova-
riante.

Por lo general, uno trabaja con vectores contravariantes. Por ejemplo: velocidad, aceleración, momento, etc.

Un ejemplo de vector covariante es el campo eléctrico:

$$E_i = -\partial_i \phi$$

3. Tensores

Un **tensor** se puede definir como un ente matemático que es **invariante** ante **cambios de coordenadas**.

Por ejemplo, un vector es un tensor. Dependiendo cómo transformen sus componentes, este será contra- o covariante.

De hecho, esto puede generalizarse a tensores de rangos más altos (más índices, pues).

3.1 Tensor contravariante, covariante

Primero voy a enlistar los ingredientes para definir un tensor de rango 2.

1. Campo matricial V sobre $\mathbb{R}^n$.
2. Sistema coordenado x^i donde las componentes de V son V^{ij} .
3. Una transformación T :

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

donde las componentes de V en $\bar{x}^i$ son $\bar{V}^{ij}$.

Hasta ahora, V es un campo matricial, **no un tensor!**

• Para que V sea un tensor se debe cumplir que:

Tensor contravariante (rango 2): Un campo matricial V es un tensor contravariante de rango 2 si sus componentes obedecen la siguiente ley de transformación entre x^i y $\bar{x}^i$:

$$\bar{V}^{ij} = V^{rs} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

• Similar para un campo matricial U , tenemos que:

Tensor covariante (rango 2): Un campo matricial U es un tensor covariante de rango 2 si sus componentes obedecen la siguiente ley de transformación entre x^i y $\bar{x}^i$:

$$\bar{U}_{ij} = U_{rs} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

• También está el **tensor mixto** que transforma como:

$$\bar{Z}^i_j = Z^r_s \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$$

- Una pregunta natural es: ¿Hasta dónde nos detenemos? La respuesta es que no hay fin.

3.1.1. Rango de un tensor

- Supón que V es un tensor con componentes:

$$V^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

el rango de V es $m = p + q$.

- Entonces, un tensor rango 0 es un escalar; cero componentes. Un vector es rango 1.

También llamamos a V un tensor tipo (p, q)

$$\Rightarrow A^i_j : (2, 0)$$

$$A_{ij} : (0, 2)$$

$$A^i_j : (1, 1)$$

etc.

Finalmente, un vector contravariante es $(1, 0)$ y un covariante $(0, 1)$.

3.2. Definición de Tensor

- Después de ver casos particulares de tensores, vectores y covectores, estamos en posición de dar la definición de un **tensor tipo (p, q)**
- Ahora sí.

$$\bar{V}_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = V_{s_1 s_2 \dots s_q}^{r_1 r_2 \dots r_p} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{r_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \quad (*)$$

- Para cerrar, para que un objeto sea un tensor, sus componentes deben transformar según la ecuación $(*)$.
- Esto es todo.