

Tensores y aplicaciones

1. Introducción

1.1. Motivación

- La física se encarga de estudiar los fenómenos naturales que nos rodean. Para describirlos utilizamos el lenguaje de las matemáticas.
- Ejemplos de esto son ya bien conocidos:
 - Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

- Faraday:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0.$$

- Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- Estas ecuaciones, entre otras que describen fenómenos físicos, son invariantes ante ciertas transformaciones (de coordenadas).
- Por ejemplo, las de Newton son invariantes de Galileo y las de Maxwell invariantes de Lorentz.

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right\} \text{Galileo}$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1 - v^2}} \end{array} \right\} \text{Lorentz}$$

$c = 1.$

- En pocas palabras, buscamos expresar a la física en un lenguaje libre de sistemas (inerciales) preferenciales.
- Afortunadamente, contamos con el aparato matemático para lograr esto: los tensores.
- Estas son cantidades que son invariantes ante cambios de coordenadas, justo lo que necesitamos!
- De hecho, ya hemos trabajado con ellos, solo que no los nombramos así.
- Ejemplos:

escalares	tensor rango cero
vectores	tensor rango uno

- Antes de estudiar la definición de un tensor, repasemos un poco la notación de índices.

1.2. Conversión de Einstein

- Conocida también como la notación de Einstein, es una notación que implica la suma sobre un par de índices con el objetivo de obtener expresiones compactas.
- Supongamos que se tiene un vector $\vec{v}$ con vectores base $\hat{e}_i$ y componentes $v_1, \dots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ que se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \sum_{i=1}^3 v^i \hat{e}_i \\ &= v^1 \hat{e}_1 + v^2 \hat{e}_2 + v^3 \hat{e}_3\end{aligned}$$

- La conversión de Einstein es simplemente remover el símbolo de suma y decir que índices repetidos se suman:

$$\vec{v} = v^i \hat{e}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

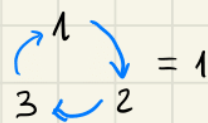
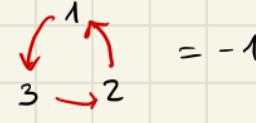
- Esta notación ofrece muchas ventajas a la hora de hacer cálculos con vectores. Por ejemplo, el producto punto ahora se puede definir como

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v^i w_i = v^1 w_1 + v^2 w_2 + v^3 w_3$$

También tenemos que el producto vectorial se escribe como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_i a_j b_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \hat{e}_i a_j b_k$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo **Levi-Civita** definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ es } (123), (231) \text{ o } (312) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es } (321), (132) \text{ o } (213) \\ 0 & \text{si } i=j \text{ o } j=k \text{ o } i=k \end{cases}$$

más sobre este "símbolo" en la siguiente clase.

Ahora, si tomamos la componente $\hat{e}_1$ de $\vec{a} \times \vec{b}$ tenemos que

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Comenzamos a sumar sobre j y k .
Índice i queda libre.

$$\begin{aligned} &= \cancel{\epsilon_{i11}} a_1 b_1 + \epsilon_{i12} a_1 b_2 + \epsilon_{i21} a_2 b_1 \\ &\quad + \epsilon_{i13} a_1 b_3 + \epsilon_{i31} a_3 b_1 + \epsilon_{i32} a_3 b_2 \\ &\quad + \epsilon_{i23} a_2 b_3 + \cancel{\epsilon_{i33}} a_3 b_3 + \cancel{\epsilon_{i22}} a_2 b_2 \end{aligned}$$

Tomemos ahora $i=1$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\epsilon_{112}}^0 a_1 b_2 + \cancel{\epsilon_{121}}^0 a_2 b_1 + \cancel{\epsilon_{113}}^0 a_1 b_3 \\ &\quad + \cancel{\epsilon_{131}}^0 a_3 b_1 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{123} a_2 b_3 \\ &= (-1) a_3 b_2 + (+1) a_2 b_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) . \end{aligned}$$

- Significa que $\vec{a} \times \vec{b}$ en la dirección $\hat{e}_1$ es $a_2 b_3 - a_3 b_2$, justo como se definió en la primer clase. El resto de las componentes se obtienen tomando $i=2, 3$.
- Con esto, es fácil verificar que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \underbrace{a_j b_k}_{\substack{\text{son números,} \\ \text{podemos reacomodarlos}}} &= \epsilon_{\underline{i} \underline{j} \underline{k}} \underline{b_k} \underline{a_j} \quad \begin{array}{l} \text{índices repetidos} \\ \text{pueden renombrarse:} \\ j \rightarrow k, k \rightarrow j \end{array} \\ &= \epsilon_{ikj} b_j a_k \quad \leftarrow \\ &= -\epsilon_{ijk} b_j a_k \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Permutación en } \epsilon_{ijk} \\ \text{da un menos.} \end{array} \\ &= -\vec{b} \times \vec{a} . \end{aligned}$$

Mismo resultado sin tener que usar el método por cofactores.

Aquí haremos uso de la **Delta de Kronecker** δ_{ij} que se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

• De esta manera, es sencillo verificar cualquier identidad vectorial sin la necesidad de resolver extensas expresiones.

• Para concluir esta sección, definiremos la siguiente convención para la suma sobre índices:

• Índices con letras del **alfabeto latino**: $i, j, k, \dots$ toman los valores $1, 2, 3$, i.e.,

$$i = 1, 2, 3.$$

Por ejemplo: $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

• En el caso de índices **griegos**; $\mu, \nu, \lambda, \alpha, \dots$ tomarán los valores $0, 1, 2, 3$, i.e.:

$$\mu = 0, 1, 2, 3.$$

Por ejemplo: $p_\mu p^\mu = p_0 p^0 + p_1 p^1 + p_2 p^2 + p_3 p^3$.

Nota:

Luego hablaremos sobre la razón de tener índices arriba o abajo.

1.3. Invariantes

Ahora que hemos introducido la convención de Einstein, podemos reescribir todas nuestras expresiones vectoriales. El **producto punto** puede definirse como ya dijimos en la sección anterior:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w_i \\ &= \delta_{ij} v_i w_j.\end{aligned}$$

Aquí hacemos uso de la Delta de Kronecker para introducir un término que estudiaremos; **la métrica**. Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= \delta_{ij} v_i w_j \\ &= \delta_{1j} v_1 w_j + \delta_{2j} v_2 w_j + \delta_{3j} v_3 w_j \\ &= \delta_{11} v_1 w_1 + \cancel{\delta_{12} v_1 w_2} + \cancel{\delta_{13} v_1 w_3} \\ &\quad + \cancel{\delta_{21} v_2 w_1} + \delta_{22} v_2 w_2 + \cancel{\delta_{23} v_2 w_3} \\ &\quad + \cancel{\delta_{31} v_3 w_1} + \cancel{\delta_{32} v_3 w_2} + \delta_{33} v_3 w_3 \\ &= \delta_{11} v_1 w_1 + \delta_{22} v_2 w_2 + \delta_{33} v_3 w_3 \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\end{aligned}$$

suma sobre i $\rightarrow$

suma sobre j $\rightarrow$

- Podemos ver que la Delta de Kronecker se comporta como

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que del producto $\delta_{ij} v_i w_j$ solo los términos de la diagonal van a contribuir al resultado.

- Una manera de interpretar esto es la siguiente:

→ La Delta de Kronecker nos dice cómo medir en un espacio plano.

- Este es un ejemplo de **métrica**. Cada espacio cuenta con una; es la regla con la que medimos la distancia entre puntos.
- Otro concepto importante que podemos introducir ahora es el de **invariantes**.
- Por ejemplo, el producto escalar es un invariante ante un cambio de coordenadas (debe de serlo ya que el resultado es un número).

Mostremos esto:

Tomemos un vector $\vec{v}$ y hagamos una rotación con ayuda de M .

$$\vec{v}' = M \vec{v}$$

vector transformado

vector original

Hagamos lo mismo con otro vector $\vec{w}$:

$$\vec{w}' = M \vec{w}$$

Ya sabemos que $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i$, pero ¿qué pasa si tomamos $\vec{v}' \cdot \vec{w}'$?

$$\begin{aligned}\vec{v}' \cdot \vec{w}' &= v_i' w_i' \\ &= (M_{ij} v_j)^T (M_{ik} w_k)\end{aligned}$$

M_{ij} son elementos de matriz: números, podemos moverlos

$$\rightarrow = (M_{ij})^T M_{ik} v_j w_k$$

$$(M_{ij})^T = M_{ji} \rightarrow = M_{ji} M_{ik} v_j w_k$$

$$M^T M = I \rightarrow = \delta_{jk} v_j w_k$$

$$= v_j w_j$$

$$= v_i w_i$$

renombramiento de índices.

- Concluimos entonces que, como vimos previamente, el producto escalar se preserva ante una rotación; **es un invariante**.

Veremos más adelante que esta noción de invarianza se puede extender a otras métricas y jugará un papel muy importante al momento de poner a prueba la congruencia de las teorías físicas que estudiaremos.

Después de todo, la física debe ser la misma sin importar dónde esté el observador.