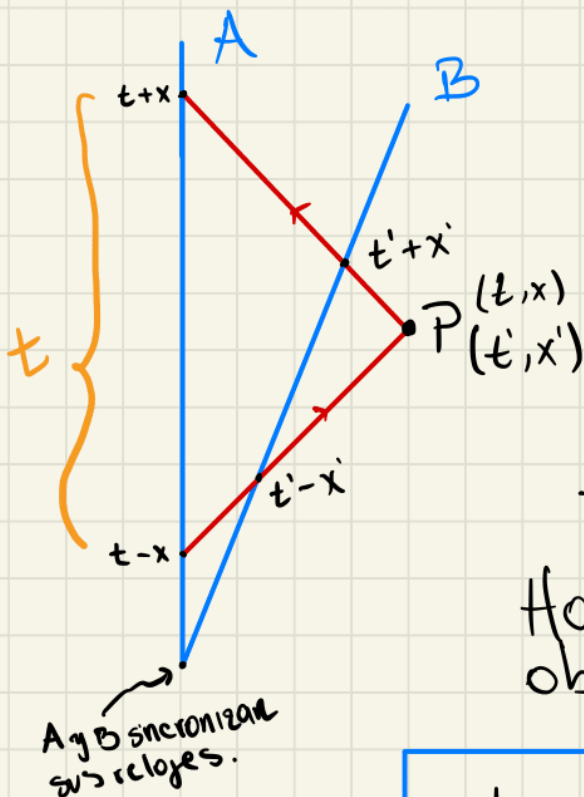


3. Transformaciones de Lorentz

- Hasta ahora hemos visto las consecuencias de los dos postulados de Einstein: la relatividad de lo simultáneo.
- Es hora de ver cómo dos marcos de referencia inerciales se comunican entre sí como consecuencia de lo que hemos aprendido.
- Consideremos un evento P con coordenadas (t, x) para un observador A y (t', x') para B .



• A envía un rayo de luz a A en $t-x$ y lo recibe en $t+x$.
Tiempo transcurrido: t .
Lo mismo aplica para B.

• De la clase pasada tenemos que:

$$t-x' = k(t-x), \quad t+x = k(t'+x')$$

Haciendo uso de $k = \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{1/2}$, se obtiene:

$$t' = \frac{t - vx}{(1 - v^2)^{1/2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

Estas son las transformaciones de Lorentz en la dirección de movimiento x .

Se puede mostrar también que

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2$$

por lo que $t^2 - x^2$ es un invariante ante las transf. de Lorentz (¡importante!)

3.1. Espacio-tiempo de Minkowski

- Antes de hablar sobre la geometría que se requiere en Relatividad Especial, comparemos la cinética entre Newton y Einstein

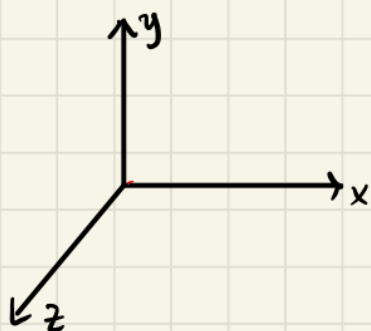
Transf. Galileana

$$t' = t$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



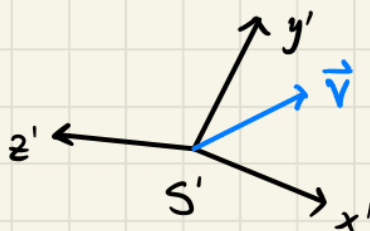
Transf. Lorentziana

$$t' = \frac{t - vx}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



Si $v \ll 1 \Rightarrow$ Galileo is enough!

Espacio y tiempo mezclados

¡Tiempo absoluto!

Con Newton, la forma de medir distancias entre eventos es simplemente:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y es un invariante de Galileo. ($d\sigma^2 = d\sigma'^2$).

El intervalo invariante ante las transf. de Lorentz es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Recuerda:
hacemos $c=1$.

Entonces, un espacio cuatridimensional en el que ds^2 es invariante se le llama espacio-tiempo de Minkowski. Esta es la geometría que se utiliza en Relatividad Especial.

• ¿Qué significa ds^2 físicamente? Tomemos $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$

Tenemos tres casos:

$$\underline{ds^2 > 0} \Rightarrow c^2 \Delta t^2 > \Delta x^2; \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| < c.$$

Timelike separated ↓

"Los eventos están separados por más tiempo que espacio"

Dada la transf. de Lorentz $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$, $\gamma = \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}$, tenemos un $v < c$ tal que

$$\Delta x' = 0 \Rightarrow v = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| < c$$

En otras palabras, para los eventos timelike existe una transf. de Lorentz en la que los eventos sucedieron en el mismo lugar.

$$ds^2 < 0 \Rightarrow c^2 \Delta t^2 < \Delta x^2; \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| > c. \quad \text{spacelike separated} \downarrow$$

"Los eventos están separados por más espacio que tiempo"

Dada la transf. de Lorentz $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$
tenemos un $v < c$ tal que

$$\Delta t' = 0 \Rightarrow v = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} < c$$

En otras palabras, para dos eventos spacelike existe una transf. de Lorentz en la que los eventos sucedieron al mismo tiempo.

• Para valores mayores y menores a $c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ el signo de $\Delta t'$ cambiará.

Los eventos spacelike podrán tener distinto orden en diferentes marcos de referencia

Para los timelike esto no es posible pues v tendría que ser mayor a c !

$ds^2 = 0$: los eventos están "lightlike separated". Significa:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c,$$

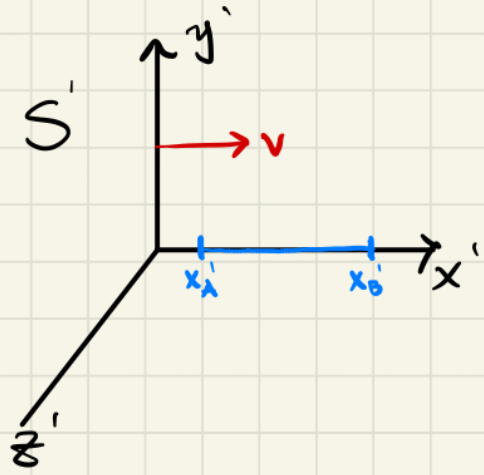
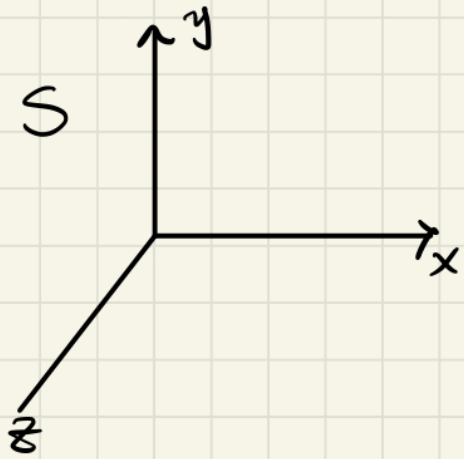
y es independiente del marco de ref. en el que estes. (segundo postulado)

Conclusión:

Todo esto concuerda con lo que vimos en el apartado de la Relatividad de lo simultáneo.

3.2. Contracción de la longitud

Considera una barra en S' con extremos X_A' y X_B' . En S serán X_A y X_B .



Como ya sabemos, X_A' y X_B' se escriben como:

$$X_A' = \gamma'(X_A - vt_A), \quad X_B' = \gamma'(X_B - vt_B).$$

Denotemos la longitud de la barra en S' como l_0 :

$$l_0 = X_A' - X_B'$$

y en S en un tiempo $t = t_A = t_B$

$$l = X_A - X_B,$$

tendremos que

$$l = \gamma^{-1} l_0$$

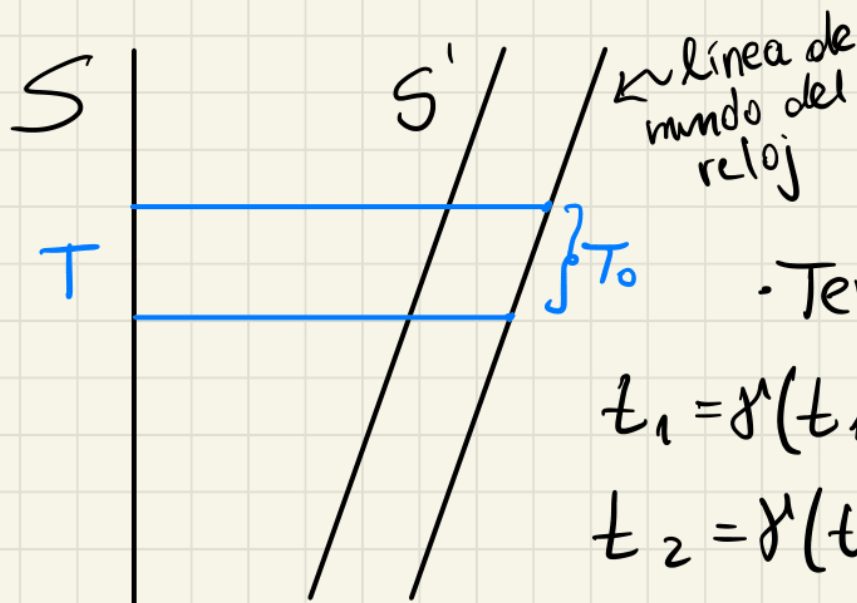
$$\gamma = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$$

! La longitud de la barra se reduce por un factor γ^{-1} !
(según S). $\leadsto$ Contracción de la longitud.

3.3. Dilatación del tiempo

Toma un reloj fijo en S' con $x' = x_A'$ que registra dos eventos en un intervalo T_0 .

Los eventos son (x_A', t_1') y $(x_A', t_1' + T_0)$.



- Tenemos que, en S :

$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{v x_A'}{c^2})$$

$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{v x_A'}{c^2})$$

Entonces, el intervalo $T = t_2 - t_1$ en S es:

$$T = \gamma T_0$$

¡ Relojes en movimiento miden el tiempo más lento por un factor γ !

↪ El tiempo se dilata según S .