UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

GRAVEDAD SIN MÉTRICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA:

JONATHAN LOZANO DE LA PARRA

Ensenada, Baja California, México. ABRIL 2016.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

GRAVEDAD SIN MÉTRICA

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

JONATHAN LOZANO DE LA PARRA

APROBADO POR:

DR. CARLOS YEE ROMERO DIRECTOR DE TESIS	DR. OSCAR MIGUEL SABIDO MORENO CODIRECTOR DE TESIS
DR. ROBERTO VÁZQUEZ MEZA SINODAL	MC. PRISCILLA ELIZABETH IGLESIAS VÁZQUEZ SINODAL

DR. JOSÉ MANUEL LÓPEZ RODRÍGUEZ
SINODAL

RESUMEN de la Tesis de Jonathan Lozano de la Parra, presentada para la obtención del título de Físico. Ensenada, Baja California, México, abril de 2016.

GRAVEDAD SIN MÉTRICA

Desde hace varias décadas se ha buscado una teoría cuántica de la gravedad con el objetivo de obtener un único modelo que describa a las cuatro interacciones fundamentales. Se han propuesto teorías que logran el objetivo, aunque solo para dimensiones bajas. Dichos modelos están escritos en términos de teorías de norma, las cuales facilitan el estudio de la cuantización gravitacional. En este trabajo se presentan teorías de norma para los casos de dos, tres y cuatro dimensiones, deduciendo sus ecuaciones de movimiento y mostrando que concuerdan con la dinámica de la relatividad general.

Palabras clave: Relatividad general, teorías de norma, gravedad cuántica.

Resumen aprobado por:

Carlos Yee R.

Dr. Carlos Yee Romero

Dedicatoria

A mis padres y a mi hermano Ernesto.

Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional durante mi preparación profesional.

A mis asesores, por darme la oportunidad de trabajar con ellos y darme el conocimiento necesario para realizar esta tesis.

A mis sinodales, por aceptar hacer una evaluación de mi trabajo final para obtener el título de Físico.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La gravedad es la interacción más débil de la naturaleza y apesar de esto, rige la dinámica y estructura del universo a grandes escalas. Durante varios siglos han existido intentos para comprender el cómo y por qué del fenómeno, los cuales se han acercado cada vez más a lo que en realidad es. Las teorías más importantes han sido las que se presentaron en el siglo XVII por Isaac Newton con su **teoría de la gravitación universal** y en el siglo XX por Albert Einstein con su teoría general de la relatividad.

El presentar una nueva forma de describir a la naturaleza, por lo general, se puede interpretar como una extensión de teorías ya establecidas, como es el caso de la gravitación Newtoniana y la **relatividad general**.

La teoría gravitacional de Newton, a pesar de que presenta irregularidades para ciertas consideraciones, se sigue siendo utilizando hasta el día de hoy, dado que es una manera muy elegante y sencilla de describir la interacción entre cuerpos celestes como el Sol y los planetas. El problema surge cuando se requieren hacer mediciones precisas, como es el caso de estimar el desplazamiento en el perihelio de Mercurio y la desviación de la luz frente a cuerpo muy masivo. Aunque los valores predichos por la mecánica Newtoniana de estas cantidades no están muy lejos de lo observado. ¿Es del todo correcta la teoría de gravitación universal? ¿Qué es lo que se necesita para llegar al valor arrojado por la naturaleza? Hasta antes del siglo XX no existía respuesta para esto, la gravitación clásica funcionaba de maravilla al explicar la dinámica del sistema solar y cómo es que nos mantenemos pegados al suelo, por lo que no era del todo necesario buscar otra explicación al fenómeno.

Sin embargo, la curiosidad de un hombre logró cambiar la forma de describir a la gravedad, dando lugar a una nueva ramificación dentro de la física. La teoría de la relatividad general se propusó para responder las incógnitas que presentaba la ya entonces vieja teoría de Newton. Einstein logró resolver los problemas que presentaba dicho trabajo de una manera muy peculiar; unió la relatividad especial con gravitación clásica, lo que llevó a una descripción de la gravedad como una propiedad geométrica del *espaciotiempo*. Esta forma revolucionaria de concebir a la interacción más débil, y con los hallazgos hechos en los años 20's por Edwin Hubble, descubrimiento de la expansión del universo, dan pie a una descripción muy acertada de la evolución, dinámica y estructura del cosmos.

Los dos mayores logros de la física teórica de las interacciones fundamentales, pueden resumirse en dos teorías; la teoría de la relatividad general y el modelo estándar de partículas elementales, este último formalizado con la ayuda de la teoría cuántica de campos. Ambas teorías han sido corroboradas experimentalmente de manera contundente. También han permitido entender la naturaleza con gran precisión dando una descripción matemática y física de estas. A pesar del gran éxito, ambas parecen ser incompatibles, ya que los principios básicos de la teoría cuántica de campos no se han podido aplicar exitosamente a la relatividad general, para así obtener una teoría cuántica de la gravedad [1]. Cabe notar que tampoco existe una formulación completa de la teoría cuántica de campos con un fondo gravitacional [2].

Una de las principales razones por las que la interacción gravitacional no se ha podido cuantizar mientras que las otras tres interacciones fundamentales sí, tiene que ver con el hecho de que la formulación matemática implicada es muy distinta en comparación a las otras. En particular, las interacciones no gravitacionales ocurren en un espaciotiempo plano. Por otro lado la gravedad es en realidad la dinámica del espaciotiempo mismo. Esto nos lleva a conjeturar que una teoría de la gravedad que pueda escribirse sin hacer referencia al espaciotiempo pueda ser cuantizable. Para esto se propone estudiar teorías de la gravedad donde la métrica[1] no es un campo fundamental.

Distintas propuestas se han hecho para obtener una teoría cuántica de la gravedad en cuatro dimensiones. Es por esto que surge un interés en estudiar a la gravedad en dimensiones bajas, dado que se pueden obtener modelos que pueden darnos una idea para entender este fenómeno en cuatro dimensiones. Incluso, como ya se mencionó, se busca trabajar desde otro punto de vista, en el cual se emplean teorías de la gravedad sin métrica. Para esto utilizaremos **teorías de norma**. Como menciona John Baez en su libro "Gauge Theories, Knots and Gravity"[3]:

> *Las teorías de norma son una de las más hermosas, simétricas leyes de la física que conocemos, y nuestras teorías del electromagnetismo, la fuerza fuerte y débil, y la gravedad son todas teorías de norma.*

De hecho, las interacciones electromagnética, fuerte y débil son descritas por un tipo de teoría de norma conocida como teoría de Yang-Mills. La gravedad,

[1] Se utiliza, principalmente, para definir el concepto de distancia en variedades. Ver A.5.

por otro lado, es descrita por una teoría llamada Chern-Simons.

A pesar de estos esfuerzos, hasta el día de hoy no se ha logrado obtener una teoría cuántica de la gravedad para cuatro dimensiones. Sin embargo existen propuestas interesantes de las cuales se han obtenido resultados prometedores; teoría de cuerdas, teoría cuántica de lazos, teoría de MacDowell-Mansouri, teoría de Chern-Simons, por mencionar algunas. Dichas teorías manejan acciones en las que estamos interesados, ya que la métrica no es el campo fundamental, lo son la *vielbein*[2] y la *conexión* los cuales pueden ser escritos en un *lenguaje de formas diferenciales.* A partir de estos dos campos fundamentales puede construirse el tensor métrico y la curvatura. Incluso se pueden obtener invariantes topológicos que, aunque no son de importancia para la teoría clásica, son valiosos para la teoría cuántica.

A partir del interés generado en las últimas décadas por tratar de describir a la gravedad desde una perspectiva cuántica, la motivación de este trabajo consiste en hacer una revisión de gravedad en dos, tres y cuatro dimensiones basada en tres artículos [4], [5] y [6]. En cada sección partiremos de una acción construida por el campo de norma $A = A(\omega, e)$ y deduciremos sus ecuaciones de movimiento para después compararlas con las obtenidas de la acción de Hilbert-Einstein.

La tesis se estructura como sigue:

- En el capítulo 2 se dará un repaso de lo que es gravedad dando una introducción a la ley de gravitación universal y relatividad general. Profundizando en la segunda, se hablará sobre los aspectos físicos de la

[2]Tomará el nombre de zweibein, dreibein y vierbien para los casos de dos, tres y cuatro dimensiones respectivamente.

teoría; en qué está basada y cómo se puede pasar de la descripción Newtoniana a la de Einstein por medio de la métrica. Con esto obtendremos las ecuaciones de movimiento para relatividad general y pasaremos a la ecuación con la que se puede derivar la acción de Hilbert-Einstein.

- En el capítulo 3 se trabajará con gravedad en dos dimensiones. Se hará una revisión parcial del artículo de Isler y Trugenberger [4] en donde exponen una generalización del modelo de Jackiw-Teitelboim. Es formulado como una teoría de norma para el grupo SO(2,1). Se comienza con la propuesta de un campo de norma, el cual está valuado en el grupo de Poincaré ISO(1,1). Para formular la acción de esta propuesta es necesario deformar el álgebra para pasar a la de SO(2,1). Es entonces cuando realizamos la variación de la acción y obtenemos las ecuaciones de movimiento.

- En el capítulo 4 comenzamos discutiendo sobre lo que es gravedad en tres dimenensiones; los problemas que tiene y la propuesta de Edward Witten en [7] para interpretarla como una teoría de norma para el grupo SO(3,1). Una consecuencia de dicha interpretación se ve reflejada en que las acciones también propuestas por él, la acción estándar y la acción exótica, son obtenidas de manera natural tras tomar la parte (anti)auto-dual del campo de norma para un lagrangiano tipo Chern-Simons [5]. Mostraremos este procedimiento explícitamente y reescribiremos el lagrangiano en términos de las acciones antes mencionadas.

- En el capítulo 5 abordaremos el tema de gravedad en cuatro dimensiones desde una perspectiva basada, de nuevo, en una teoría de norma. En este caso será la de MacDowell-Mansouri [8]. Reescribiremos el lagrangiano en una notación de formas y deduciremos las ecuaciones de movimiento para dicha teoría. También mostraremos que a partir de una generalización del lagrangino, como fue en el caso de Chern-Simons, se obtienen ecuaciones de movimiento que tienen la misma forma que las del lagrangiano original. Un paso intermedio será mostrar a los invariantes topológicos que se obtienen de dicha teoría generalizada.

- El capítulo 6 contiene las conclusiones del trabajo realizado.

Por último, se tiene un apartado que cubrirá la parte matemática de la tesis. Se presentarán las definiciones de vectores, tensores y uno-formas así como sus respectivas operaciones. De igual manera se presentarán a los tensores de curvatura que son necesarios para definir la acción de Hilbert-Eistein en el capítulo 2.

Capítulo 2

Gravedad

2.1. Newton

El 5 de julio de 1687 Sir Isaac Newton publica su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* considerada una de las obras más importantes en la historia de la ciencia. En dicha obra, Newton expone sus famosas leyes de movimiento, al igual que la *ley de gravitación universal* con la cual logró derivar las ecuaciones de movimiento planetario encontradas por Johannes Kepler a principios del mismo siglo.

Hablando más especificamente sobre la ley de gravitación, Newton encontró que la atracción a la que están sujetos dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Para el caso en el que los cuerpos tienen simetría esférica. lo anterior puede expresarse como

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \tag{2.1}$$

donde G es la constante de gravitación universal, m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos, mientras que r_1 y r_2 son las posiciones de las masas. Ahora, con ayuda de la tercera ley de Newton podemos escribir que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

De 2.1 se ve que la fuerza disminuye si se aumenta la distancia entre los objetos o las masas son pequeñas comparadas a G[1] e incrementa si la distancia entre los cuerpos tiende a cero o el producto de las masas aumenta considerablemente (del orden de G o mayor).

Una de las grandes aportaciones de esta teoría fue el descubrimiento de Neptuno por medio de cálculos matemáticos. Esto ya que Urano presentaba desviaciones no predichas por la ley de gravitación, por lo que se propuso la existencia de otro cuerpo celeste que compensara dicha desviación.

Ahora, si consideramos las magnitudes de la segunda ley de Newton así como la de gravitación

$$F = ma, \tag{2.2}$$

y

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \tag{2.3}$$

respectivamente. De aquí podemos obtener la siguiente ecuación

$$a = G\frac{M}{r^2}, \tag{2.4}$$

será la aceleración experimentada por un objeto que se encuentre a una distancia r de otro de masa M. Si consideramos la masa M como la de la Tierra y r el radio terrestre, obtendremos la famosa cantidad g[2] a la que están sujetos todos los cuerpos sobre nuestro planeta. Para que lo anterior sea cierto, tendremos que hacer ciertas aclaraciones en los pasos realizados. Formalmente, la masa m que se encuentra en 2.3 es mejor considerarla como una masa gravitacional, m_g, y de igual manera en 2.2 pero como masa inercial,

[1] El valor de la constante gravitacional G no fue encontrado por Newton, sino por Henry Cavendish casi un siglo después de haber sido propuesta. Su valor aproximado es de $G \approx 6{,}67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

[2] Cuenta con un valor aproximado de $g \approx 9{,}81 ms^{-2}$

m_i. Por lo que al realizar la igualdad tendremos un término que involucra el cociente de dichas masas. Entonces, para que la ecuación 2.4 sea válida, debe cumplirse la siguiente relación

$$\frac{m_g}{m_i} = 1. \tag{2.5}$$

Hasta este momento se han mencionado los logros de esta teoría aunque cuenta con ciertos problemas. El más conocido es el intento de describir la preseción del perihelio de Mercurio. Esto significa que el punto de máxima aproximación al Sol debería ser siempre el mismo, pero debido a efectos gravitacionales el perihelio se ve afectado. A base de observaciones se logró obtener una cifra para dicha desviación, la cual no concordaba con la predicha por la teoría de Newton. A pesar de que esta diferencia es practicamente insignificante, se logró obtener el valor exacto a partir de la teoría propuesta por Einstein hace 100 años.

2.2. Relatividad General

Esta nueva propuesta para describir a la gravedad de una manera geométrica se basa en distintos **principios físicos** los cuales son interpretados matemáticamente y de esta manera poder obtener las ecuaciones de campo de Einstein [9].

2.2.1. Principios de la relatividad general

Principio de equivalencia. Es el que mayor aporte tiene para la teoría, ya que los aspectos físicos implicados son los que indican que el fenómeno de la gravedad no es más que una manifestación de algo mucho más abstracto. Se comienza con un experimento mental que consta de un observador confinado en un pequeño elevador sin ventanas que será colocado en distintos lugares del universo para ver los efectos dentro del mismo.

1. Sobre la superficie terrestre, el observador sentirá una aceleración de g en dirección del centro de la Tierra.

2. En algún lugar del universo suficientemente lejos de cualquier objeto como para considerar que no hay campos gravitacionales, el sujeto se sentirá en un entorno de ingravidez.

3. Mismo arreglo que el caso 2, solo que el elevador se acelera a g por lo que el sujeto sentirá una fuerza que lo atrae hacia el suelo.

4. El elevador está en caída libre hacia la Tierra por lo que el sujeto estará en un entorno de ingravidez.

Los casos 1 y 3 son indistinguibles para el observador, así como los eventos 2 y 4. Con lo anterior, podemos enunciar el principio de equivalencia como:

> *No existen experimentos locales*[3] *que puedan distinguir caída libre en presencia de gravedad de movimiento uniforme en la ausencia de gravedad.*

O de manera equivalente:

> *Un marco de referencia acelerado respecto a otro que no lo está, es localmente idéntico a un marco en reposo en presencia de un campo gravitacional.*

Y es fácil ver que el experimento mental propuesto concuerda con dicho enunciado.

[3] Regiones del espaciotiempo donde la variación en la intensidad de campo es indistinguible.

Principio covariancia general. Dado que relatividad general ahora toma a los marcos acelerados como una clase de movimiento inercial, como en el caso anterior, Einstein propuso que todos los observadores fueran *equivalentes*. En consecuencia, no existen observadores inerciales globales, por lo menos en relatividad general. Dadas las propiedades de invariancia ante transformaciones de los tensores, el principio se lee como:

Las ecuaciones físicas deberán tener forma tensorial.

Principio de correspondencia. Al introducir una nueva forma de entender un fenómeno, es necesario que la nueva forma de verlo incluya a la anterior, en cierto límite. Por lo que gravedad de Newton y relatividad especial pueden obtenerse de relatividad general considerando la aproximación de campo débil y tomando velocidades $v/c << 1$.

Principio de mínimo acoplamiento. Indica la forma en la que las leyes de la física se transforman para pasar a un espacio-tiempo curvado. Los pasos necesarios para realizar lo anterior son como siguen:

1. Se toman las leyes físicas válidas en un sistema de coordenadas inercial.

2. Se escriben en su forma tensorial.

3. Se verifica que la ley resultante es verdadera en un espaciotiempo curvo.

Basado en estos principios, se lograron explicar distintos fenómenos gravitacionales previamente estudiados. Uno de los grandes éxitos de relatividad general fue predecir la desviación del perihelio de Mercurio. A pesar de que es un número muy pequeño, ninguna teoría gravitacional había logrado encontrarlo. A principios del siglo XXVII, el astrónomo Johann Georg obtuvo una estimación de la desviación de la luz frente a un cuerpo celeste basada en la gravitación de Newton, aunque un siglo después se mostró que era errónea. Otro logro considerable para Einstein fue el de encontrar dicho ángulo a partir de las herramientas propuestas en su teoría.

2.2.2. Ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de campo de Einstein, que describen el movimiento de los cuerpos a través del espacio, originalmente no fueron obtenidas de un lagrangiano. La idea original fue buscar una ecuación que tomara el lugar de la ecuación de Poisson para el potencial Newtoniano. Esto es, encontrar un objeto que reemplazaría al potencial y contuviera la distribución de masa en una forma más general. La ecuación para el potencial Newtoniano es

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{2.6}$$

donde ∇^2 es el Laplaciano y ρ es la densidad de masa. La forma general relativista de ρ es el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Por lo que, basados en [10], el potencial gravitacional deberá tomar la forma del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Entonces, como ya se mencionó, es necesario que la métrica cuente con derivadas de segundo orden. Se propone entonces la siguiente ecuación

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

donde k es la constante de proporcionalidad aún no definida. La expresión anterior nos servirá de guía para encontrar las ecuaciones de movimiento. Para lograr nuestro objetivo, podemos proponer al tensor de Riemman $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ como candidato, ya que tiene derivadas de segundo orden sobre la métrica. El único inconveniente es que no tiene el número correcto de índices. Esto no es problema, ya que podemos contraer sus índices para obtener al tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Tenemos entonces:

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Aunque existe un incoveniente; la conservación de la energía que se expresa como

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{2.9}$$

por 2.8 tendríamos que:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.10}$$

Pero las identidades de Bianchi [10] nos dicen que para una geometría general

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R, \tag{2.11}$$

por lo que 2.10 no es verdadera en este caso. Nos vemos obligados a proponer otro tensor simétrico de segundo orden, en este caso el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

el cual cumple con $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Por lo tanto, tras hacer la nueva consideración de $G_{\mu\nu}$ en lugar de $R_{\mu\nu}$ en 2.8, llegamos a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \tag{2.13}$$

La tarea ahora es encontrar la constante de proporcinalidad y comprobar que 2.13 reproduce la gravedad como la conocemos. Para lograr esto, la reescribimos como

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T). \tag{2.14}$$

Ahora consideremos un fluido perfecto como fuente de energía-momento, que se escribe

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{2.15}$$

donde U^μ es la cuadrivelocidad[4], ρ y p son la densidad de energía y presión respectivamente. Para el límite Newtoniano ignoramos la presión, ya que las

[4]Recordando que $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$.

partículas tienen velocidad pequeña comparada a la de la luz, por lo tanto 2.15 se reduce a

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu. \tag{2.16}$$

Dado que trabajamos en un marco de referencia en reposo se sigue que

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0). \tag{2.17}$$

Tomando el límite de campo débil[5] descrito por [10], se tiene que

$$g_{00} = -1 + h_{00}, \tag{2.18}$$

$$g^{00} = -1 - h_{00}. \tag{2.19}$$

A partir de la definición de cuadrivelocidad llegamos a que[6]

$$U^0 = 1 + \frac{1}{2}h_{00}. \tag{2.20}$$

Introduciendo 2.20 en 2.16 y para nuestro nivel de aproximación, $h_{00} << 1$, obtenemos que

$$T_{00} = \rho. \tag{2.21}$$

Conociendo este valor podemos calcular la traza del tensor energía-momento[7]

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} = -\rho. \tag{2.22}$$

Evaluamos 2.22 en 2.14 para obtener

$$R_{00} = \frac{1}{2}k\rho. \tag{2.23}$$

[5]Se considera a la métrica $g_{\mu\nu}$ como la de Minkowski más una pequeña perturbación. Esto es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

[6]A primer orden en h_{00}.

[7]Las componentes espaciales T_{ii} son pequeñas comparadas a la temporal, por lo que son ignoradas.

Lo que resta hacer es buscar la forma explícita del lado izquierdo de 2.23 y la manera de hacerlo es comparándola con el tensor de Riemman $R^i{}_{0i0}$. Siendo cero el término con parcial temporal y considerando que los productos de el símbolo de Christoffel[8] Γ^2 son muy pequeños, encontramos que

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i{}_{0i0} \\ &= \partial_i[\frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00})] \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Comparamos 2.23 y 2.24 se obtiene

$$\nabla^2 h_{00} = -k\rho. \tag{2.25}$$

Tomando el conocido resultado [10]: $h_{00} = -2\Phi$, entonces 2.25 es la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional, solo si $k = 8\pi G$. Por lo que la propuesta de que $G_{\mu\nu}$ fuera el tensor que acompañara al de energía-momento en la ecuación 2.7 funcionó; obtuvimos gravedad clásica en cierto límite, en concordancia con el principio de correspondencia. Por lo que la dinámica de la relatividad general está descrita por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

la cual indica cómo el espaciotiempo adquiere cierta geometría en presencia de masa y energía.

2.2.3. Acción de Hilbert-Einstein

Una forma alternativa y más formal de obtener las ecuaciones de Einstein, es por medio del principio de mínima acción aplicado a la **acción de Hilbert-Einstein**. Dado que nuestra variable dinámica es la métrica, el único escalar

[8] Ver apéndice.

que la contiene es el Ricci, R. Entonces, la propuesta de Hilbert y Eistein fue

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}R, \tag{2.27}$$

donde el término $d^4x\sqrt{-g}$ indica que la integración es sobre una variedad.

Para obtener las ecuaciones de movimiento tenemos que variar respecto a la métrica. Para hacer la tarea más sencilla, reescribimos la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{2.28}$$

Comenzamos variando respecto a la métrica para obtener

$$\delta S_1 = \int d^4x\delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{2.29}$$

$$\delta S_2 = \int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.30}$$

$$\delta S_3 = \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{2.31}$$

δS_2 ya está de la forma deseada, por lo que centramos nuestra atención en los términos restantes. Para δS_1 utilizamos la propiedad de la variación del determinante[9] con la cual calculamos

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\ &= \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Sustituimos 2.32 en 2.29 para obtener

$$\delta S_1 = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}Rg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{2.33}$$

Para el término 2.31 empleamos la identidad de Palatini[10] lo que nos arroja

$$\begin{aligned}\delta S_3 &= \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma[g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})].\end{aligned} \tag{2.34}$$

[9] $\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})$

[10] $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})$

Ahora reemplazamos en 2.34 el valor de $\delta\Gamma$ en términos de δg, que tiene como valor

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[g_{\lambda\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\alpha\beta})], \tag{2.35}$$

lo cual nos lleva a

$$\delta S_3 = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_{\sigma}[g_{\mu\nu}\nabla^{\sigma}(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\lambda}(\delta g^{\sigma\lambda})]. \tag{2.36}$$

Por el teorema de Stokes, 2.36 es una contribución de frontera en el infinito, la cual podemos tomar como cero. Ahora sumamos los resultados de 2.29 y 2.30

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R]\delta g^{\mu\nu}. \tag{2.37}$$

Los puntos estacionarios son aquellos donde $\delta S/\delta g^{\mu\nu} = 0$ lo que tiene como consecuencia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \tag{2.38}$$

por lo tanto hemos recuperado con éxito las ecuaciones de Einstein en el vacío. El término de energía no aparece ya que no lo incluímos en la acción. Definimo entonces

$$S = \frac{1}{16\pi G}S_{HE} + S_M, \tag{2.39}$$

donde S_{HE} es la acción en 2.27 normalizada para obtener el resultado deseado mientras que S_M es parte de la acción relacionada a la materia y energía. Variando respecto al inverso de la métrica obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \tag{2.40}$$

de donde definimos al tensor energía-momento como

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{2.41}$$

lo que nos lleva a obtener las ecuaciones de Einstein en presencia de energía

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.42}$$

Hemos obtenido las ecuaciones de movimiento de relatividad general por el método tradicional de variaciones. También se vio cómo deducir la dinámica gravitacional de Newton a partir de esta nueva teoría, por lo que tenemos un excelente candidato para describir a la gravedad desde un punto de vista geométrico.

2.3. Formalismo de primer orden

Para detallar la relación entre relatividad general y teorías de norma, es conveniente elegir una base ortonormal para el espacio tangente T_p (ver A.2) que no esté relacionado a la elección de coordenadas (**base no-coordenada**). Tomemos ahora un conjunto de bases **ortonormales**, $\hat{e}_a$, que están relacionadas al sistema coordenada por $\hat{e}_\mu = e^a_\mu \hat{e}_a$ y que cumplen con

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}, \tag{2.43}$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski con $a, b = 0, 1, 2, 3$ con la siguiente convención de signos $diag(\eta_{ab}) = (-1, 1, 1, 1)$. Por otro lado tenemos las **vierbein** e^a_μ que son matrices invertibles que relacionan ambos sistemas.

Nuestra meta será llegar a una expresión para 2.27 en este nuevo formalismo. Comenzaremos definiendo a la curvatura, según [7] como

$$R = e^\alpha_a e^\beta_b F^{ab}{}_{\alpha\beta}, \tag{2.44}$$

donde

$$F^{ab}{}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \omega_\beta{}^{ab} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{ba} + \omega_\alpha{}^{ac} \omega_{\beta c}{}^{b} - \omega_\beta{}^{ac} \omega_{\alpha c}{}^{b}. \tag{2.45}$$

donde ω se le conoce **conexión de spin**[11], la cual es la conexión para el grupo de Lorentz (con el cual estamos trabajando).

Ahora escribiremos a la métrica en términos de la tetrada con ayuda de 2.43. Tomamos la siguiente notación: $g \equiv detg_{\mu\nu}$. Desarrollamos lo anterior como sigue

$$\begin{aligned} detg_{\mu\nu} &= det(e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}) \\ &= det(e^a_\mu) det(e^b_\nu) det(\eta_{ab}) \\ &= -det^2(e^a_\mu). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Definiendo ahora $det^2(e^a_\mu) \equiv e^2$, llegamos a la siguiete relación

$$g = -e^2. \tag{2.47}$$

Empleando la identidad[12] $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} e = \varepsilon_{abcd} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\lambda e^d_\rho$ y aplicando $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ por la derecha obtenemos

$$e = \frac{1}{24} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abcd} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\lambda e^d_\rho. \tag{2.48}$$

Finalmente, escribimos la acción de Hilbert-Einstein en este nuevo formalismo

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x e e^\alpha_a e^\beta_b F^{ab}{}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{24} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abcd} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\lambda e^d_\rho e^\alpha_a e^\beta_b F^{ab}{}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{24} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abcd} \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu e^c_\lambda e^d_\rho F^{ab}{}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{24} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{abcd} e^c_\lambda e^d_\rho F^{ab}{}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Continuamos desarrollando la expresión anterior pero ahora con una notación de formas diferenciales.

Primero tenemos que utilizar la propiedad $d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho$.

[11] Comparar con la ecuación A.31.

[12] Aquí ε es el tensor de Levi-Civita en cuatro dimensiones, el cual tiene las mismas propiedades que en tres dimensiones.

Con esto reescribimos la acción como

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{24}\int dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\wedge dx^{\lambda}\wedge dx^{\rho}\varepsilon_{abcd}e^{c}_{\lambda}e^{d}_{\rho}F^{ab}{}_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{24}\int \varepsilon_{abcd}(F^{ab}{}_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu})\wedge e^{c}_{\lambda}dx^{\lambda}\wedge e^{d}_{\rho}dx^{\rho} \\
&= \frac{1}{12}\int \varepsilon_{abcd}(\frac{1}{2}F^{ab}{}_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu})\wedge e^{c}_{\lambda}dx^{\lambda}\wedge e^{d}_{\rho}dx^{\rho} \\
&= \frac{1}{12}\int \varepsilon_{abcd}F^{ab}\wedge e^{c}\wedge e^{d}.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Por conveniencia definimos $e^c \wedge e^d = \Sigma^{cd}$ y concluímos el desarrollo con la siguiente expresión para la acción en un lenguaje de formas

$$
S = \frac{1}{12}\int \varepsilon_{abcd}\Sigma^{cd}\wedge F^{ab}. \tag{2.51}
$$

Iniciamos la derivación de las ecuaciones de movimiento. Comenzamos haciendo la variación respecto a la tetrada

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{12}\int \varepsilon_{abcd}\delta\Sigma^{cd}\wedge F^{ab} \\
&= \frac{1}{12}\int \varepsilon_{abcd}\delta(e^{c}\wedge e^{d})\wedge F^{ab} \\
&= \frac{1}{12}\int (\varepsilon_{abcd}\delta e^{c}\wedge e^{d} + \varepsilon_{abcd}e^{c}\wedge\delta e^{d})\wedge F^{ab} \\
&= \frac{1}{12}\int (\varepsilon_{abcd}\delta e^{c}\wedge e^{d} - \varepsilon_{abcd}\delta e^{d}\wedge e^{c})\wedge F^{ab} \\
&= \frac{1}{12}\int (\varepsilon_{abcd}\delta e^{c}\wedge e^{d} - \varepsilon_{abdc}\delta e^{c}\wedge e^{d})\wedge F^{ab} \\
&= \frac{1}{6}\int \varepsilon_{abcd}\delta e^{c}\wedge e^{d}\wedge F^{ab}.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Extremando la acción, obtenemos la ecuación de movimiento

$$
\varepsilon_{abcd}e^{d}\wedge F^{ab} = 0, \tag{2.53}
$$

o bien, ya que ni el tensor de Levi-Civita o la tetrada son necesariamente cero, se obtiene

$$
F^{ab} = 0, \tag{2.54}
$$

la cual es la ecuación de movimiento.

Para concluir, consideraremos la variación respecto a la conexión ω. En este caso utilizaremos la representación en formas de la curvatura, $F = d\omega + \omega \wedge \omega$, lo que nos lleva a utilizar una notación aún más reducida sin índices

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{12}\int \Sigma \wedge \delta F \\
&= \frac{1}{12}\int \Sigma \wedge \delta(d\omega + \omega \wedge \omega) \\
&= \frac{1}{12}\int \Sigma \wedge [\delta d\omega + \delta(\omega \wedge \omega)] \\
&= \frac{1}{12}\int \Sigma \wedge \delta d\omega + \Sigma \wedge \delta(\omega \wedge \omega)] \\
&= \frac{1}{12}\int [\Sigma \wedge \delta d\omega + \Sigma \wedge (\delta\omega \wedge \omega + \omega \wedge \delta\omega)] \\
&= \frac{1}{12}\int [\Sigma \wedge \delta d\omega + \Sigma \wedge (\delta\omega \wedge \omega - \delta\omega \wedge \omega)] \\
&= \frac{1}{12}\int [\Sigma \wedge \delta d\omega + 2\Sigma \wedge \delta\omega \wedge \omega].
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Para finalizar el procedimiento, consideremos la expresión $d(\Sigma \wedge \delta\omega) = d\Sigma \wedge \delta\omega - \Sigma \wedge \delta d\omega$ que se sustituye en 2.55

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{12}\int [d(\Sigma \wedge \delta\omega) + d\Sigma \wedge \delta\omega + 2\omega \wedge \Sigma \wedge \delta\omega] \\
&= \frac{1}{12}\int (d\Sigma\ + 2\omega \wedge \Sigma) \wedge \delta\omega,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

de aquí se obtiene la ecuación de movimiento

$$d\Sigma + 2\omega \wedge \Sigma = 0. \tag{2.57}$$

Hemos obtenido las ecuaciones de movimiento para la acción de Hilbert-Einstein en el vacío bajo una formulación de primer orden. En este caso se obtuvieron dos ecuaciones en lugar de una; 2.54 equivale a 2.38 dado que $F^{ab} = 0$ se interpreta como que el tensor de Ricci es cero. La segunda ecuación, 2.57, es de constricción. De hecho, es la derivada covariante de la tetrada respecto a la conexión, lo que implica ω es una conexión riemanniana asociada con la métrica g sobre la variedad M.

Capítulo 3

Gravedad en dos dimensiones

Los modelos de gravedad dos-dimensional han atraído gran atención en las últimas decadas, dado que la cuantización de la gravedad en cuatro dimensiones enfrenta grandes dificultades. Es natural pensar en modelos de gravedad a menor dimensión los cuales comparten ciertas propiedades con la cuadri-dimensional. El modelo de gravitación en dos dimensiones sin materia es no-dinámico[1]; la acción de Hilbert-Einstein, en el vacío, es un invariante topológico en el sentido de que es una derivada total

$$S = \int d^2x\sqrt{-g}R = 4\pi\chi, \tag{3.1}$$

donde $\chi = 2(1 - \mathfrak{g})$ es la característica de Euler y $\mathfrak{g}$ es el género de la superficie. De aquí que las ecuaciones de movimiento son triviales.

En los espacios que estamos interesados, el tensor de Riemann cuenta con una sola componente correspondiente al escalar de curvatura

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{d(d-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \tag{3.2}$$

contrayendo con $g^{\mu\rho}$ y haciendo renombramiento de índices obtenemos el

[1] No cuenta con ecuaciones de movimiento.

tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{d} g_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

entonces, para el caso con $d = 2$ obtendremos que

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \tag{3.4}$$

por lo que el tensor de Einstein es igual a cero. Si se considera una acción con constante cosmológica[2] Λ

$$S = \int d^2x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \tag{3.5}$$

las ecuaciones de movimiento respecto a $g_{\mu\nu}$ son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{3.6}$$

de aquí que la única solución es cuando $\Lambda = 0$. Concluímos entonces que gravedad en dos dimensiones, sin materia, existe solamente cuando la constante cosmológica se desvanece [11].

3.1. Teoría de Jackiw-Teitelboim

Como un análogo natural a las ecuaciones de Einstein en el vacío, Jackiw y Teitelboim propusieron la ecuación $R - 2\Lambda = 0$, donde R es el escalar de curvatura de Ricci y Λ la constante cosmológica [4]. Incluso aún, propusieron la acción que arroja dicha ecuación

$$S_{JT} = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)\phi \tag{3.7}$$

donde ϕ es un campo adimensional auxiliar con valores en el álgebra de Lie. La variación respecto a ϕ arroja las ya mencionadas ecuaciones de movimiento

$$R - 2\Lambda = 0, \tag{3.8}$$

[2] Constante introducida por Einstein para obtener soluciones estáticas a sus ecuaciones.

las cuales nos indican que la curvatura está fija a una constante.

A continuación se presentará una generalización de este modelo que se puede llevar a una teoría de norma para el grupo SO(2,1). Dicho modelo se formula en términos de la *Zweibein* e^a $(a = 0, 1)$ y la conexión de spin ω, tomadas como variables independientes y combinadas en el campo de norma A del grupo de Poincaré ISO(1,1),

$$A = e^a P_a + \omega M \tag{3.9}$$

donde P_a son los generadores de translaciones y M es el generador de las transformaciones de Lorentz. Juntos satisfacen el álgebra de Poincaré dos-dimensional

$$\begin{aligned} &[M, P_a] = \epsilon_a{}^b P_b, \\ &[P_a, P_b] = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La convensión para la métrica de Minkowski y el tensor antisimétrico ϵ son $\eta_{ab} = diag(-1, 1)$, $\epsilon_{01} = 1$. La dos-forma de curvatura se construye a partir de la conexión A

$$F = dA + A \wedge A, \tag{3.11}$$

Otra forma de escribir lo anterior es la siguiente. Tomamos la defínción del campo de norma 3.9 y el álgebra de Poincaré 3.10 para formar

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ &= d(e^a P_a + \omega M) + (e^a P_a + \omega M) \wedge (e^b P_b + \omega M), \\ &= de^a P_a + d\omega M + (e^a P_a + \omega M) \wedge (e^b P_b + \omega M) \end{aligned} \tag{3.12}$$

trabajamos ahora solo con el término cuadrático de 3.11 y desarrollamos

$$\begin{aligned} A \wedge A &= (e^a P_a + \omega M) \wedge (e^b P_b + \omega M), \\ &= e^a P_a \wedge e^b P_b + \omega M \wedge e^b P_b + e^a P_a \wedge \omega M + \omega M \wedge \omega M \end{aligned} \tag{3.13}$$

los términos $e^aP_a \wedge e^bP_b$ y $\omega M \wedge \omega M$ son cero por las relaciones de conmutación 3.10. Continuamos desarrollando entonces los términos restantes

$$\begin{aligned} A \wedge A &= \omega M \wedge e^bP_b + e^aP_a \wedge \omega M, \\ &= (\omega_i M e^b_j P_b + e^a_i P_a \omega_j M) dx^i \wedge dx^j, \\ &= (\omega_i M e^a_j P_a + e^a_i P_a \omega_j) dx^i \wedge dx^j, \\ &= (\omega_j e^a_j M P_a + e^a_i \omega_j P_a M) dx^i \wedge dx^j, \\ &= (\omega_j e^a_j M P_a - \omega_i e^a_j P_a M) dx^i \wedge dx^j, \\ &= \omega_i e^a_j [M, P_a] dx^i \wedge dx^j, \\ &= \epsilon_a{}^b P_b \omega_i e^a_j dx^i \wedge dx^j, \\ &= -e^a{}_b \omega \wedge e^b P_a. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En el último paso se renombraron y permutaron índices de ϵ. Uniendo los resultados de 3.12 y 3.14 escribimos 3.11 como

$$F = \tau^a P_a + \mathcal{R} M, \tag{3.15}$$

donde $\tau^a = de^a - \omega \epsilon^a{}_b \wedge e^b$ y $\mathcal{R} = d\omega$ son la torsión y la dos-forma curvatura, respectivamente.

Desafortunadamente no es posible formular una teoría de norma con el grupo ISO(1,1) dado que no hay una forma bilineal no-degenerada en el álgebra de Poincaré. Aunque, en presencia de una constante cosmológica Λ este parámetro se puede utilizar para deformar el álgebra de Poincaré para obtener el álgebra de de Sitter

$$\begin{aligned} [M, P_a] &= \epsilon_a{}^b P_b, \\ [P_a, P_b] &= \Lambda \epsilon_{ab} M. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Esta álgebra posee forma no-degenerada bilineal invariante dada por la métrica de Killing

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \Lambda \eta_{ab} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

donde $i, j = 0, 1, 2$. Definiendo ahora $T_i = (T_0, T_1, T_2) = (P_0, P_1, M)$ podemos reescribir el álgebra de de Sitter de una manera más compacta

$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^{k} T_k = \epsilon_{ijk} g^{kl} T_l \tag{3.18}$$

La métrica de Killing se hace degenerada en el límite cuando $\Lambda \to 0$. Para el espacio-tiempo de Minkowski, (la ecuación anterior) es el álgebra de SO(2,1), mientras que para el espacio-tiempo eucliadiano con $\Lambda > 0$ se convierte en el álgebra de SO(3).

La dos-componente de la curvatura, correspondiente al generador de Lorentz M, se convierte ahora

$$\mathcal{R} = d\omega + \frac{\Lambda}{2}\epsilon_{ab} e^a \wedge e^b. \tag{3.19}$$

Las condiciones para que la curvatura sea cero, $F = 0$, son las ecuaciones de movimiento del modelo de Jackiw-Teitelboim,

$$F = 0 \iff T^a = 0 \text{ y } \mathcal{R} = 0, \tag{3.20}$$

donde $\mathcal{R} = 0$ puede escribirse como la ecuación 3.8. Aquí tomamos $R = 2d\omega/(-\frac{1}{2}\epsilon_{ab} e^a \wedge e^b)$.

Por último, tomamos la traza sobre el álgebra de Lie dado por la métrica de Killing; $\mathrm{Tr} T_i T_j = g_{ij}$, para escribir 3.20 como las ecuaciones de movimiento de la acción

$$S = \int Tr(\phi F) = \int Tr\phi(dA + A \wedge A), \tag{3.21}$$

de aquí podemos ver que una variación de 3.21 respecto a ϕ arroja

$$\begin{aligned}
\delta_\phi S &= \delta \int Tr(\phi F), \\
&= \int Tr(\delta\phi F + \phi\delta F), \\
&= \int Tr(\delta\phi F).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Tenemos entonces que

$$F = 0, \tag{3.23}$$

en concordancia con el modelo propuesto por Jackiw-Teitelboim.[4]

Capítulo 4

Gravedad en tres dimensiones

Relatividad general en 2+1 dimensiones cuenta con varias características interesantes; renormalización, integrabilidad, invariancia topológica, etc., que son de gran valor ya que pueden ser un camino para encontrar una teoría cuántica de la gravedad en cuatro dimensiones. Dichas propiedades se deben a que la gravedad en esta dimensión puede ser escrita como una teoría de norma, más especificamente como una teoría de Chern-Simons. Esta relación fue encontrada por E. Witten [7]; relatividad general en tres dimensiones con una constante cosmológica Λ es equivalente a una teoría de Chern-Simons sobre una variedad arbitraria X con cierto grupo de norma $\mathbf{G}$. De igual manera mostró que existen dos acciones asociadas a dos diferentes maneras de parametrizar la forma bilinear invariante del álgebra de Lie de $\mathbf{G}$: las arrojan las mismas ecuaciones de movimiento, aunque su cuatización arrojará dos teorías cuánticas distintas, lo cual no discutiremos en este trabajo.

La acción de Chern-Simons depende solamente del campo de norma A para el grupo a considerar

$$S = \int Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A), \tag{4.1}$$

donde $A = A(\omega, e)$. Esta acción puede ser generalizada tomando su parte (anti-)auto-dual con respecto a los índices internos del campo de norma.

En este capítulo mostraremos que las acciones estándar y exótica, que describen a la gravedad de Chern-Simons, se encuentran codificadas en la acción (anti-)auto-dual. Esto lo haremos comparando las ecuaciones de movimiento arrojadas por la teoría auto-dual con las obtenidas de las acciones estándar y exótica.

4.1. La acción estándar

Comenzaremos definiendo la acción estándar, la cual es una forma de escribir la acción de Hilbert-Einstein en el formalismo de primer orden.

$$S = \int d^3x \epsilon^{ijk}[e_{ia}(\partial_j {\omega_k}^a - \partial_k {\omega_j}^a) + \epsilon_{abc} e_i^a {\omega_j}^b {\omega_k}^c + \frac{1}{3}\Lambda \epsilon_{abc} e_i^a e_j^b e_k^c]. \quad (4.2)$$

Mostraremos que la acción anterior puede ser escrita en un lenguaje de formas como

$$S = 2\int e \wedge (F + \frac{1}{3}\Lambda e \wedge e). \quad (4.3)$$

Comenzamos utilizando la siguiente propiedad en 4.2

$$\epsilon^{ijk} d^3x = dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad (4.4)$$

lo que nos lleva a separar el resultado en tres partes:

$$S_1 = \int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_{ia}(\partial_j {\omega_k}^a - \partial_k {\omega_j}^a) \quad (4.5)$$

$$S_2 = \int \epsilon_{abc} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_i^a {\omega_j}^b {\omega_k}^c \quad (4.6)$$

$$S_3 = \frac{\Lambda}{3}\int \epsilon_{abc} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_i^a e_j^b e_k^c. \quad (4.7)$$

De esta manera podemos escribir S_1 en notación de formas como

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_{ia}(\partial_j {\omega_k}^a - \partial_k {\omega_j}^a) \\
&= \int (e_{ia}) dx^i \wedge (\partial_j {\omega_k}^a - \partial_k {\omega_j}^a) dx^j \wedge dx^k, \\
&= \int (e_{ia}) dx^i \wedge (d\omega^a)_{jk} dx^j \wedge dx^k \\
&= 2\int e_a \wedge d\omega^a.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para S_2 se tiene

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int \epsilon_{abc} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_i^a {\omega_j}^b {\omega_k}^c \\
&= \int \epsilon_{abc} (e_i^a) dx^i \wedge ({\omega_j}^b) dx^j \wedge ({\omega_k}^c) dx^k \\
&= \int \epsilon_{abc} e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por último para S_3

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{\Lambda}{3}\int \epsilon_{abc} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_i^a e_j^b e_k^c \\
&= \frac{\Lambda}{3}\int \epsilon_{abc} (e_i^a) dx^i \wedge (e_j^b) dx^j \wedge (e_k^c) dx^k \\
&= \frac{\Lambda}{3}\int \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Entonces podemos escribir 4.2 como

$$S = 2\int (e_a \wedge d\omega^a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc} e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c). \tag{4.11}$$

Una manera más compacta y útil de escribir 4.11 es como sigue

$$\begin{aligned}
S =& 2\int (e_a \wedge d\omega^a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc} e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c) \\
=& 2\int (d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] + \frac{1}{6}\Lambda[e, e]) \wedge e \\
=& 2\int (d\omega + \omega \wedge \omega + \frac{1}{3}\Lambda e \wedge e) \wedge e \\
=& 2\int e \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega + \frac{1}{3}\Lambda e \wedge e), \\
=& 2\int e \wedge (F + \frac{1}{3}\Lambda e \wedge e)
\end{aligned} \quad . \tag{4.12}$$

Procedemos ahora a tomar la variación de 4.11 respecto a la uno-forma e en donde haremos uso explícito de los índices de grupo.

$$\begin{aligned}\delta_e S =&2\int[\delta(e_a\wedge d\omega^a)+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\delta(e^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c)\\&+\frac{\Lambda}{6}\epsilon_{abc}\delta(e^a\wedge e^b\wedge e^c)]\\=&2\int[\delta e^a\wedge d\omega_a+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\delta e^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c\\&+\frac{\Lambda}{3}\epsilon_{abc}\delta e^a\wedge e^b\wedge e^c]\\=&2\int(d\omega_a+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+\frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}e^b\wedge e^c)\wedge\delta e^a.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Entonces la ecuación de movimiento será

$$d\omega_a+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+\frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}e^b\wedge e^c=0.\tag{4.14}$$

De manera más compacta puede ser escrita como

$$d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]+\frac{1}{2}\Lambda[e,e]=0,\tag{4.15}$$

o de manera equivalente

$$F+\Lambda e\wedge e=0.\tag{4.16}$$

Ahora, tomamos la variación de 4.11 respecto a la conexión de spin ω.

$$\begin{aligned}\delta_\omega S =&2\int[\delta(e_a\wedge d\omega^a)+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\delta(e^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c)\\&+\frac{\Lambda}{6}\epsilon_{abc}\delta(e^a\wedge e^b\wedge e^c)]\\=&2\int[e_a\wedge\delta d\omega^a+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}e^a\wedge\delta(\omega^b\wedge\omega^c)]\\=&2\int(de_a\wedge\delta\omega^a+\epsilon_{abc}e^b\wedge\omega^c\wedge\delta\omega^a)\\=&2\int(de_a+\epsilon_{abc}\omega^b\wedge e^c)\wedge\delta\omega^a.\end{aligned}\tag{4.17}$$

De donde obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$de_a+\epsilon_{abc}\omega^b\wedge e^c=0,\tag{4.18}$$

las cuales pueden ser reescritas como

$$de + [\omega, e] = 0, \tag{4.19}$$

o de forma equivalente

$$D_\omega e = 0. \tag{4.20}$$

4.2. La acción exótica

Otra manera de escribir la acción para gravedad 2+1, como ya se mencionó, es con la acción exótica que se escribe como

$$\begin{aligned} I = \int d^3x \varepsilon^{ijk} [\omega_i{}^a (\partial_j \omega_{ka} - \partial_k \omega_{ja} + \frac{2}{3} \epsilon_{abc} \omega_j{}^b \omega_k{}^c) \\ + \Lambda e_i^a (\partial_j e_{ka} - \partial_k e_{ja}) + 2\Lambda \epsilon_{abc} \omega_i{}^a e_j^b e_k^c]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Renombramos las partes de la integral como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \omega_i{}^a (\partial_j \omega_{ka} - \partial_k \omega_{ja}), \\ I_2 &= \frac{2}{3} \int \epsilon_{abc} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \omega_i{}^a, \omega_j{}^b \omega_k{}^c, \\ I_3 &= \Lambda \int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_i^a (\partial_j e_{ka} - \partial_k e_{ja}), \\ I_4 &= 2\Lambda \int \epsilon_{abc} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \omega_i{}^a e_j^b e_k^c. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Comenzamos reescribiendo I_1 en lenguaje de formas

$$\begin{aligned} I_1 &= \int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \omega_i{}^a (\partial_j \omega_{ka} - \partial_k \omega_{ja}) \\ &= \int (\omega_i{}^a) dx^i \wedge (\partial_j \omega_{ka} - \partial_k \omega_{ja}) dx^j \wedge dx^k \\ &= \int (\omega_i{}^a) dx^i \wedge (d\omega_a)_{jk} dx^j \wedge dx^k \\ &= 2 \int \omega^a \wedge d\omega_a. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Para I_2 se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{3}\int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \varepsilon_{abc}{\omega_i}^a{\omega_j}^b{\omega_k}^c \\ &= \frac{2}{3}\int \epsilon_{abc}({\omega_i}^a)dx^i \wedge ({\omega_j}^b)dx^j \wedge ({\omega_k}^c)dx^k \\ &= \frac{2}{3}\int \epsilon_{abc}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para I_3 se tiene

$$\begin{aligned} I_3 &= \Lambda\int dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k e_i^a(\partial_j e_{ka} - \partial_k e_{ja}) \\ &= \Lambda\int (e_i^a)dx^i \wedge (\partial_j e_{ka} - \partial_k e_{ja})dx^j \wedge dx^k \\ &= 2\Lambda\int e^a \wedge de_a. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Por último para I_4

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\Lambda\int \epsilon_{abc}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k {\omega_i}^a e_j^b e_k^c \\ &= 2\Lambda\int \epsilon_{abc}({\omega_i}^a)dx^i \wedge (e_j^b)dx^j \wedge (e_k^c)dx^k \\ &= 2\Lambda\int \epsilon_{abc}\omega^a \wedge e^b \wedge e^c. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Escribimos entonces 4.21 como

$$\begin{aligned} I =& 2\int [\omega^a \wedge d\omega_a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \\ &+ \Lambda e^a \wedge de_a + \Lambda\epsilon_{abc}\omega^a \wedge e^b \wedge e^c], \end{aligned} \tag{4.27}$$

o de manera equivalente

$$I = 2\int [\omega \wedge (d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega) + \Lambda e \wedge de + 2\Lambda\omega \wedge e \wedge e]. \tag{4.28}$$

Lo anterior se logra utilizando la misma metodología para llegar a 4.12

Comenzamos haciendo la variación de las cuatro partes de 4.27 respecto a la conexión ω. Para I_1 tenemos

$$\begin{aligned}\delta I_1 &= 2\int \delta(\omega^a \wedge d\omega_a),\\ &= 2\int (\delta\omega^a \wedge d\omega_a + \omega^a \wedge \delta d\omega_a)\\ &= 2\int [\delta\omega^a \wedge d\omega_a + \delta\omega^a \wedge d\omega_a - d(\omega^a \wedge \delta\omega_a)]\\ &= 4\int \delta\omega^a \wedge d\omega_a.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Para I_2

$$\begin{aligned}\delta I_2 =& \frac{2}{3}\int \epsilon_{abc}\delta(\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c)\\ =& \frac{2}{3}\int \epsilon_{abc}[\delta\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \omega^a \wedge \delta\omega^b \wedge \omega^c\\ &+ \omega^a \wedge \omega^b \wedge \delta\omega^c]\\ =& 2\int \epsilon_{abc}\delta\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c.\end{aligned} \tag{4.30}$$

I_3 no aporta a la variación respecto a ω ya que no depende de éste. Finalmente, la variación de I_4

$$\begin{aligned}\delta I_4 &= 2\Lambda\int \epsilon_{abc}\delta(\omega^a \wedge e^b \wedge e^c)\\ &= 2\Lambda\int \epsilon_{abc}\delta\omega^a \wedge e^b \wedge e^c.\end{aligned} \tag{4.31}$$

La variación respecto a ω es entonces

$$\delta I = 4\int \delta\omega^a \wedge d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\delta\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}\delta\omega^a \wedge e^b \wedge e^c. \tag{4.32}$$

De donde las ecuaciones de movimiento son

$$d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}e^b \wedge e^c = 0. \tag{4.33}$$

De manera más compacta puede ser escrita como

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] + \frac{1}{2}\Lambda[e,e] = 0, \tag{4.34}$$

o de manera equivalente

$$F + \Lambda e \wedge e = 0. \tag{4.35}$$

Para la variación respecto a la triada, e, tenemos que I_1 y I_2 no contribuyen a las ecuaciones de movimiento, por lo que trabajamos con las restantes.

$$\begin{aligned}
\delta I_3 &= 2\Lambda \int \delta(e^a \wedge de_a) \\
&= 2\Lambda \int (\delta e^a \wedge de_a + e^a \wedge \delta de_a), \\
&= 2\Lambda \int [\delta e^a \wedge de_a + \delta e^a \wedge de_a - d(e^a \wedge \delta e_a)] \\
&= 4\Lambda \int \delta e^a \wedge de_a.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Para I_4 se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta I_4 &= 2\Lambda \int \epsilon_{abc} \delta(\omega^a \wedge e^b \wedge e^c) \\
&= 2\Lambda \int \epsilon_{abc} \omega^a \wedge \delta(e^b \wedge e^c) \\
&= 2\Lambda \int \epsilon_{abc} \omega^a \wedge (\delta e^b \wedge e^c + e^b \wedge \delta e^c) \\
&= 4\Lambda \int \epsilon_{abc} \omega^a \wedge \delta e^b \wedge e^c \\
&= 4\Lambda \int \epsilon_{abc} \delta e^a \wedge \omega^b \wedge e^c.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

La variación total de I respecto a e será

$$\delta I = 4\Lambda \int (\delta e^a \wedge de_a + \epsilon_{abc} \delta e^a \wedge \omega^b \wedge e^c). \tag{4.38}$$

Por lo que la ecuación de movimiento es

$$\Lambda(de_a + \epsilon_{abc} \omega^b \wedge e^c) = 0, \tag{4.39}$$

que podemos escribir como

$$\Lambda(de + [\omega, e]) = 0, \tag{4.40}$$

y de forma equivalente

$$\Lambda(D_\omega e) = 0. \tag{4.41}$$

Hemos entonces obtenido las ecuaciones de movimiento para las acciones presentadas al principio del capítulo; estándar y exótica. Si tomamos una combinación lineal de ambas y hacemos una variación respecto a ω obtendremos

$$\frac{a}{2} D_\omega e + b(F + \Lambda e \wedge e) = 0. \tag{4.42}$$

Mientras que una variación respecto a e nos arrojará

$$\frac{a}{2}(F + \Lambda e \wedge e) + b\Lambda D_\omega e = 0, \tag{4.43}$$

donde a y b son constantes.

Teoría de Chern-Simons autodual

La acción de Chern-Simons para un campo de norma auto-dual es dada por

$$L^{\pm}_{CS} = \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} ({}^{\pm}A_i^{AB} \partial_j^{\pm} A_{kAB} + \frac{2}{3} {}^{\pm}A_{iA}{}^{B\pm} A_{jB}{}^{C\pm} A_{kC}{}^{A}). \tag{4.44}$$

donde $A, B, C, D = 0, 1, 2, 3$, $\eta_{AB} = diag(-1, +1, +1, +1)$ y el campo de norma puede descomponerse como

$${}^{\pm}A_i{}^{AB} = \frac{1}{2}(A_i{}^{AB} \mp \frac{i}{2} \varepsilon^{AB}{}_{CD} A_i{}^{CD}), \tag{4.45}$$

y

$${}^{\pm}A_{iAB} = \frac{1}{2}(A_{iAB} \mp \frac{i}{2} \varepsilon_{ABCD} A_i{}^{CD}), \tag{4.46}$$

que satisfacen la relación

$$\varepsilon^{AB}{}_{CD} {}^{\pm}A_i{}^{CD} = \pm i {}^{\pm}A^{AB}. \tag{4.47}$$

Desarrollamos el primer término de la acción

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk\pm}A_i{}^{AB}\partial_j{}^{\pm}A_{kAB} =&\varepsilon^{ijk}[\frac{1}{2}(A_i{}^{AB} \mp \frac{i}{2}\varepsilon^{AB}{}_{CD}A_i{}^{CD})\partial_j{}^{\pm}A_{kAB}] \\
=&\varepsilon^{ijk}(\frac{1}{2}A_i{}^{AB}\partial_j{}^{\pm}A_{kAB} \mp \frac{i}{4}\varepsilon^{AB}{}_{CD}A_i{}^{CD}\partial_j{}^{\pm}A_{kAB}) \\
=&\varepsilon^{ijk}[\frac{1}{2}A_i{}^{AB}\partial_j(\frac{1}{2}A_{kAB} \mp \frac{i}{4}\varepsilon_{AB}{}^{FG}A_{kFG}) \\
\mp& \frac{i}{4}\varepsilon^{AB}{}_{CD}A_i{}^{CD}\partial_j(\frac{1}{2}A_{kAB} \mp \frac{i}{4}\varepsilon_{AB}{}^{FG}A_{kFG})] \\
=&\varepsilon^{ijk}[\frac{1}{4}A_i{}^{AB}\partial_j A_{kAB} \mp \frac{i}{8}A_i{}^{AB}\partial_j\varepsilon_{AB}{}^{FG}A_{kFG} \\
\mp& \frac{i}{8}\varepsilon^{AB}{}_{CD}A_i{}^{CD}\partial_j A_{kAB} - \frac{i^2}{16}\varepsilon^{AB}{}_{CD}\varepsilon_{ABFG}A_i{}^{CD}\partial_j A_k{}^{FG}].
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Ahora empleamos la identidad

$$\varepsilon^{AB}{}_{CD}\varepsilon_{ABFG} = -2(\eta_{CF}\eta_{DG} - \eta_{CG}\eta_{DF}), \tag{4.49}$$

en el último término de 4.48 y empleando la propiedad de antisimetría de A llegamos a

$$\varepsilon^{ijk\pm}A_i{}^{AB}\partial_j{}^{\pm}A_{kAB} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}[A_i{}^{AB}\partial_j A_{kAB} \mp \frac{i}{2}\varepsilon^{ABCD}A_{iAB}\partial_j A_{kCD}], \tag{4.50}$$

Ahora centramos nuestra atención en el segundo término de 4.44, el cual es

$$\varepsilon^{ijk\pm}A_{iA}{}^{B\pm}A_{jB}{}^{C\pm}A_{kC}{}^{A}. \tag{4.51}$$

Tomamos la definición de los campos auto-duales para escribir

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk\pm}A_{iA}{}^{B\pm}A_{jB}{}^{C\pm}A_{kC}{}^{A} = \frac{1}{8}\varepsilon^{ijk}[(A_{iA}{}^{B} \mp \frac{i}{2}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_i{}^{ED})(A_{jB}{}^{C} \mp \frac{i}{2}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_j{}^{FG})\cdot \\
\cdot (A_{kC}{}^{A} \mp \frac{i}{2}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_j{}^{OP})].
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk\pm}A_{iA}{}^{B\pm}A_{jB}{}^{C\pm}A_{kC}{}^{A} =& \frac{1}{8}\varepsilon^{ijk}[A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A} \mp \frac{i}{2}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{PO}A_{iA}^{\ B}A_{jB}{}^{C} \\
&\mp \frac{i}{2}A_{iA}{}^{B}A_{kC}^{\ A}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG} + \frac{i^2}{4}A_{iA}{}^{B}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{OP} \\
&\mp \frac{i}{2}A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{kC}{}^{A} + \frac{i^2}{4}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{OP}A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED} \\
&+ \frac{i^2}{4}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{j}{}^{OP}A_{kC}{}^{A} \\
&+ (\mp)\frac{i^3}{8}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP}],
\end{aligned} \tag{4.53}$$

lo cual podemos reescribir en dos partes; una real y otra imaginaria

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk\pm}A_{iA}{}^{B\pm}A_{jB}{}^{C\pm}A_{kC}{}^{A} =& \frac{1}{8}\varepsilon^{ijk}[A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A} - \frac{1}{4}A_{iA}{}^{B}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{OP} \\
&- \frac{1}{4}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{OP}A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED} - \frac{1}{4}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{j}{}^{OP}A_{kC}{}^{A}] \\
&\mp \frac{i}{16}\varepsilon^{ijk}[A_{iA}{}^{B}A_{kC}^{\ A}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG} + A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{kC}{}^{A} \\
&+ \varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{PO}A_{iA}^{\ B}A_{jB}{}^{C} \\
&- \frac{1}{4}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP}].
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Ahora tomamos la parte real de la ecuación anterior y simplificaremos términos

$$\begin{aligned}
&A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A} - \frac{1}{4}A_{iA}{}^{B}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{OP} \\
&- \frac{1}{4}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{OP}A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED} - \frac{1}{4}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{j}{}^{OP}A_{kC}{}^{A}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Se tienen tres términos con la expresión $\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}$ solo que con índices distintos. De manera oportuna reacomodamos índices y factores de ε

$$\begin{aligned}
&A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A} + \frac{1}{4}\varepsilon^{C}{}_{BFG}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{iA}{}^{B}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG} \\
&+ \frac{1}{4}\varepsilon^{A}{}_{COP}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{k}{}^{OP}A_{jB}{}^{C}A_{i}{}^{ED} + \frac{1}{4}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}\varepsilon^{B}{}_{AED}A_{i}{}^{ED}A_{j}{}^{OP}A_{kC}{}^{A},
\end{aligned} \tag{4.56}$$

para emplear la siguiente identidad que involucra deltas de Kronecker δ

$$\begin{aligned}\varepsilon_{cdab}\varepsilon^{cije} = &- (\delta^i_d\delta^j_a\delta^e_b + \delta^i_b\delta^j_d\delta^e_a + \delta^i_a\delta^j_b\delta^e_d \\ &- \delta^i_a\delta^j_d\delta^e_b - \delta^i_b\delta^j_a\delta^e_d - \delta^i_d\delta^j_b\delta^e_a).\end{aligned} \tag{4.57}$$

Aplicamos la identidad al segundo término de 4.56 para obtener

$$\begin{aligned}\varepsilon^C{}_{BFG}\varepsilon_C{}^{AOP}A_{iA}{}^BA_{kOP}A_j{}^{FG} = &-\frac{1}{4}(A_{iB}{}^BAj\ {}^{FP}A_{kFP} \\ &+ A_{iG}{}^BA_j{}^{PG}A_{kBP} + A_{iF}{}^BA_j{}^{FO}A_{kOB} \\ &- A_{iF}{}^BA_j{}^{FP}A_{kBP} - A_{iG}{}^BA_j{}^{OG}A_{kOB} \\ &- A_{iB}{}^BA_j{}^{PG}A_{kGP}).\end{aligned} \tag{4.58}$$

El primer y último término son cero dado que la traza de los campos de norma son cero. Continuamos reduciendo términos

$$\begin{aligned}\varepsilon^C{}_{BFG}\varepsilon_C{}^{AOP}A_{iA}{}^BA_{kOP}A_j{}^{FG} = &-\frac{1}{4}(A_{iG}{}^BA_j{}^{PG}A_{kBP} + A_{iF}{}^BA_j{}^{FO}A_{kOB} \\ &- A_{iF}{}^BA_j{}^{FP}A_{kBP} - A_{iG}{}^BA_j{}^{OG}A_{kOB}) \\ = &-\frac{1}{4}(A_{iA}{}^BA_j{}^{CA}A_{kBC} + A_{iA}{}^BA_j{}^{AC}A_{kCB} \\ &- A_{iA}{}^BA_j{}^{AC}A_{kBC} - A_{iA}{}^BA_j{}^{CA}A_{kCB}),\end{aligned} \tag{4.59}$$

donde se hizo uso del renombramiento de índices. Por último hacemos permutación de los mismos para aplicar la antisimetría del campo de norma A y llegar a que

$$\varepsilon^C{}_{BFG}\varepsilon_C{}^{AOP}A_{iA}{}^BA_{kOP}A_j{}^{FG} = A_{iA}{}^BA_{jB}{}^CA_{kC}{}^A. \tag{4.60}$$

Ahora, podemos aplicar este mismo procedimiento para el resto de los términos en 4.56 y llegar así a que la parte real de 4.54 se escribe como

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}A_{iA}{}^BA_{jB}{}^CA_{kC}{}^A. \tag{4.61}$$

Ahora trabajamos con la parte imaginaria de 4.54

$$\begin{aligned}
&\mp \frac{i}{16}\varepsilon^{ijk}[A_{iA}{}^{B}A_{kC}{}^{A}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG} + A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{kC}{}^{A} \\
&+ \varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{PO}A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C} \\
&- \frac{1}{4}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP}].
\end{aligned} \tag{4.62}$$

El último término lo podemos expresar como

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP} \\
&\quad = -\,\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP}(\delta^{B}_{C}\delta^{E}_{O}\delta^{D}_{P} + \delta^{B}_{P}\delta^{E}_{C}\delta^{D}_{O} \\
&\qquad + \delta^{B}_{O}\delta^{E}_{P}\delta^{D}_{C} - \delta^{B}_{O}\delta^{E}_{C}\delta^{D}_{P} - \delta^{B}_{P}\delta^{E}_{O}\delta^{D}_{C} - \delta^{B}_{C}\delta^{E}_{P}\delta^{D}_{O}) \\
&\quad = -\,(\varepsilon_{B}{}^{E}{}_{FG}A_{k}{}^{OB}A_{iEO}A_{j}{}^{FG} + \varepsilon_{B}{}^{D}{}_{FG}A_{k}{}^{BP}A_{iPD}A_{j}{}^{FG} \\
&\qquad - \varepsilon_{O}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OD}A_{iCD}A_{j}{}^{FG} - \varepsilon_{P}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{EP}A_{iEC}A_{j}{}^{FG}).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Reacomodamos índices

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP} = &-(\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{CD}A_{k}{}^{OA}A_{iBO}A_{j}{}^{CD} \\
&+ \varepsilon_{A}{}^{B}{}_{CD}A_{k}{}^{AP}A_{iPB}A_{j}{}^{CD} \\
&- \varepsilon_{A}{}^{B}{}_{CD}A_{k}{}^{AO}A_{iBO}A_{j}{}^{CD} \\
&- \varepsilon_{A}{}^{B}{}_{CD}A_{k}{}^{EA}A_{iEB}A_{j}{}^{CD}).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Tras renombrar índices llegamos a que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}\varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{k}{}^{OP}A_{j}{}^{FG}A_{i}{}^{OP} &= -4\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{CD}A_{i}{}^{AE}A_{jEB}A_{k}{}^{CD} \\
&= -4\varepsilon^{ABCD}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD},
\end{aligned} \tag{4.65}$$

donde en la última igualdad se subieron los índices A, C y D. Sustituyendo 4.65 en 4.62 se obtiene

$$\begin{aligned}
\mp\frac{i}{16}\varepsilon^{ijk}[&A_{iA}{}^{B}A_{kC}{}^{A}\varepsilon_{B}{}^{C}{}_{FG}A_{j}{}^{FG} + A_{jB}{}^{C}\varepsilon_{A}{}^{B}{}_{ED}A_{i}{}^{ED}A_{kC}{}^{A} \\
&+ \varepsilon_{C}{}^{A}{}_{OP}A_{k}{}^{PO}A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C} + \varepsilon^{ABCD}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD}].
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Renombramos índices y hacemos permutaciones del tensor de Levi-Civita y el campo de norma para llegar a que la parte imaginaria de 4.54 es

$$\mp \frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ABCD}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD}. \tag{4.67}$$

Sustitumos 4.61 y 4.67 en 4.54 para encontrar

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk\pm}A_{iA}{}^{B\pm}A_{jB}{}^{C\pm}A_{kC}{}^{A} =&\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A}\\
&\pm \frac{i}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ABCD}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD}\\
=&\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A}\\
&\pm \frac{i}{2}\varepsilon^{ABCD}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD}).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Finalmente podemos escribir el lagrangiano de Chern-Simons tras sustituir 4.50 y 4.68 en 4.44

$$\begin{aligned}
L_{CS}^{\pm} =& \int_X \frac{1}{2}d^3x\varepsilon^{ijk}(A_i{}^{AB}\partial_j A_{kAB} + \frac{2}{3}A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A})\\
&\mp \frac{i}{4}\int_X d^3x\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ABCD}(A_{iAB}\partial_j A_{kCD} - \frac{2}{3}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD}).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

El siguiente paso es realizar la variación de 4.67 respecto al campo de norma $A_i{}^{AB}$ para encontrar las ecuaciones de movimiento. Para esto, separaremos el lagrangiano en cuatro partes, haremos las variaciones de cada término y por último sumaremos cada contribución.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_X d^3x\varepsilon^{ijk}A_i{}^{AB}\partial_j A_{kAB},\\
I_2 &= \frac{1}{3}\int_X d^3x\varepsilon^{ijk}A_{iA}{}^{B}A_{jB}{}^{C}A_{kC}{}^{A},\\
I_3 &= \frac{i}{4}\int_X d^3x\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ABCD}A_{iAB}\partial_j A_{kCD},\\
I_4 &= -\frac{i}{6}\int_X d^3x\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ABCD}A_{iA}{}^{E}A_{jEB}A_{kCD}.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Tomamos la variación de I_1 respecto a $A_i{}^{AB}$

$$\begin{aligned}
\delta I_1 &= \frac{1}{2}\delta \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} A_i{}^{AB} \partial_j A_{kAB} \\
&= \frac{1}{2} \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} [\delta A_i{}^{AB} \partial_j A_{kAB} + A_i{}^{AB} \delta(\partial_j A_{kAB})] \\
&= \frac{1}{2} \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} [\delta A_i{}^{AB} \partial_j A_{kAB} + A_{iAB} \delta(\partial_j A_k{}^{AB})] \\
&= \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} \delta A_i{}^{AB} \partial_j A_{kAB},
\end{aligned} \tag{4.71}$$

donde hemos integrado por partes para llegar al último paso. Hacemos ahora la variación de I_2

$$\begin{aligned}
\delta I_2 &= \frac{1}{3}\delta \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} A_{iA}{}^B A_{jB}{}^C A_{kC}{}^A \\
&= \frac{1}{3} \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} (\delta A_{iA}{}^B A_{jB}{}^C A_{kC}{}^A + A_{iA}{}^B \delta A_{jB}{}^C A_{kC}{}^A + A_{iA}{}^B A_{jB}{}^C \delta A_{kC}{}^A) \\
&= \frac{1}{3} \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} (\delta A_i{}^{AB} A_{jB}{}^C A_{kCA} + A_{kC}{}^A \delta A_{iA}{}^B A_{jB}{}^C + A_{kC}{}^A A_{jB}{}^C \delta A_{iA}{}^B) \\
&= \frac{1}{3} \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} (\delta A_i{}^{AB} A_{jB}{}^C A_{kCA} + A_{kCA} \delta A_i{}^{AB} A_{jB}{}^C + A_{kCA} A_{jB}{}^C \delta A_i{}^{AB}) \\
&= \int_X \varepsilon^{ijk} d^3x \delta A_i{}^{AB} A_{jB}{}^C A_{kCA}.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Sumamos δI_1 e δI_2

$$\delta I_{1+2} = \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} \delta A_i{}^{AB} (\partial_j A_{kAB} + A_{jB}{}^C A_{kCA}). \tag{4.73}$$

Para las integrales I_3 e I_4 se realiza el mismo procedimiento, para llegar entonces a que la variación es

$$\delta I_{3+4} = \frac{i}{2} \int_X d^3x \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ABCD} \delta A_i{}^{AB} (\partial_j A_k{}^{CD} - A_j{}^C{}_E A_k{}^{ED}). \tag{4.74}$$

Sumamos δI_{1+2} con δI_{3+4} para obtener δI

$$\begin{aligned}
\delta I = \int_X & d^3x \varepsilon^{ijk} [(\partial_j A_{kAB} + A_{jB}{}^C A_{kCA}) \\
& \mp \frac{i}{2} \varepsilon_{ABCD} (\partial_j A_k{}^{CD} - A_j{}^C{}_E A_k{}^{ED})] \delta A_i{}^{AB}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

De la ecuación anterior podemos separar la variación de la acción en dos partes; real e imaginaria

$$\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_{kAB} + A_{jB}{}^{C} A_{kCA})\delta A_i{}^{AB}, \tag{4.76}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ABCD}(\partial_j A_k{}^{CD} - A_j{}^{C}{}_{E} A_k{}^{ED})\delta A_i{}^{AB}, \tag{4.77}$$

dado que al hacer la variación respecto a $A_i{}^{AB}$ los índices AB quedaron libres, tendremos que asignarles los valores correspondientes. Para esto abriremos los índices de acuerdo a

$$A_i{}^{AB} = (A_i{}^{ab}, A_i{}^{3a}) = (\omega_i{}^{ab}, \sqrt{\Lambda} e_i^a). \tag{4.78}$$

Para comenzar, tomaremos la primer ecuación de movimiento, 4.76, y asignaremos los valores $A = 3$ y $B = b$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_{k3b} + A_{jb}{}^{C} A_{kC3})\delta A_i{}^{3b} \\
&= \varepsilon^{ijk}(\partial_j A_{k3b} + A_{jb}{}^{c} A_{kc3} + A_{jb}{}^{3} A_{k33})\delta A_i{}^{3b} \\
&= \varepsilon^{ijk}(\partial_j A_{k3b} + A_{jb}{}^{c} A_{kc3})\sqrt{\Lambda}\delta e_i^b \\
&= \varepsilon^{ijk}(\sqrt{\Lambda}\partial_j e_{kb} + \varepsilon_b{}^{cd}\omega_{jd}(-\sqrt{\Lambda} e_{kc}))\sqrt{\Lambda}\delta e_i^b \\
&= \sqrt{\Lambda}\varepsilon^{ijk}(\partial_j e_{kb} - \varepsilon_b{}^{cd}\omega_{jd} e_{kc})\sqrt{\Lambda}\delta e_i^b \\
&= \sqrt{\Lambda}\varepsilon^{ijk}(\partial_j e_{kb} + \varepsilon_b{}^{ac}\omega_{ja} e_{kc})\sqrt{\Lambda}\delta e_i^b.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Ahora damos los valores de $A = a$ y $B = b$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_{kab} + A_{jb}{}^{C} A_{kCa})\delta A_i{}^{ab} \\
&= \varepsilon^{ijk}(\partial_j A_{kab} + A_{jb}{}^{c} A_{kca} + A_{jb}{}^{3} A_{k3a})\delta A_i{}^{ab} \\
&= \varepsilon^{ijk}(\partial_j \varepsilon_{abg}\omega_k{}^{g} - A_j{}^{3}{}_{b}\sqrt{\Lambda} e_{ka} + \varepsilon_b{}^{c}{}_{d}\varepsilon_{ca}{}^{e}\omega_j{}^{d}\omega_{ke})\delta A_i{}^{ab} \\
&= \varepsilon^{ijk}(\partial_j \varepsilon_{abg}\omega_k{}^{g} - \Lambda e_{jb} e_{ka} + \varepsilon_b{}^{c}{}_{d}\varepsilon_{ca}{}^{e}\omega_j{}^{d}\omega_{ke})\varepsilon^{abf}\delta\omega_{if} \\
&= \varepsilon^{ijk}(\partial_j \varepsilon_{abg}\varepsilon^{abf}\omega_k{}^{g} - \varepsilon^{abf}\Lambda e_{jb} e_{ka} + \varepsilon^{abf}\varepsilon_b{}^{c}{}_{d}\varepsilon_{ca}{}^{e}\omega_j{}^{d}\omega_{ke})\delta\omega_{if}.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Procedemos a utilizar las siguientes identidades

$$\varepsilon_{abg}\varepsilon^{abf} = -2\delta^f_g, \tag{4.81}$$

$$\varepsilon^{abf}\varepsilon_{ace} = -(\delta^b_c\delta^f_e - \delta^b_e\delta^f_c). \tag{4.82}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{ijk}[-2\delta^f_g{\omega_k}^g - \Lambda\varepsilon^{abf}e_{jb}e_{ka} + (\delta^b_c\delta^f_e - \delta^b_e\delta^f_c){\varepsilon_b}^c{}_d{\omega_j}^d{\omega_k}^e]\delta\omega_{if} \\
&= \varepsilon^{ijk}(-2\partial_j{\omega_k}^f + \Lambda\varepsilon^{abf}e_{ja}e_{kb} - {\varepsilon^f}_{de}{\omega_j}^d{\omega_k}^e)\delta\omega_{if} \\
&= -\varepsilon^{ijk}(2\partial_j{\omega_k}^f + {\varepsilon^f}_{ab}{\omega_j}^a{\omega_k}^b - \Lambda{\varepsilon^f}_{ab}e^a_je^b_k)\delta\omega_{if}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Tras dar los valores correspondientes al campo de gauge, se obtuvo que las ecuaciones de movimiento 4.76 tienen la siguiente forma

$$\sqrt{\Lambda}\varepsilon^{ijk}(\partial_je_{kb} + {\varepsilon_b}^{ac}\omega_{ja}e_{kc})\sqrt{\Lambda}\delta e^b_i, \tag{4.84}$$

$$-\varepsilon^{ijk}(2\partial_j{\omega_k}^f + {\varepsilon^f}_{ab}{\omega_j}^a{\omega_k}^b - \Lambda{\varepsilon^f}_{ab}e^a_je^b_k)\delta\omega_{if}. \tag{4.85}$$

Realizamos el mismo análisis para la segunda ecuación de movimiento en 4.77. Comenzamos dando los valores al campo de $A = a$ y $B = b$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{abCD}(\partial_j{A_k}^{CD} - {A_j}^C{}_E{A_k}^{ED})\delta{A_i}^{ab} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\varepsilon_{ab3d}\partial_j{A_k}^{3d} + \varepsilon_{abc3}\partial_j{A_k}^{c3} - \varepsilon_{ab3D}{A_j}^3{}_E{A_k}^{ED} - \varepsilon_{abcD}{A_j}^c{}_E{A_k}^{ED})\delta{A_i}^{ab} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-\varepsilon_{abc}\partial_j{A_k}^{3c} + \varepsilon_{abc}\partial_j{A_k}^{c3} - \varepsilon_{ab3d}{A_j}^3{}_e{A_k}^{ed} - \varepsilon_{abc3}{A_j}^c{}_e{A_k}^{e3})\delta{A_i}^{ab} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-\varepsilon_{abc}\partial_j{A_k}^{3c} + \varepsilon_{abc}\partial_j{A_k}^{c3} + \varepsilon_{abc}{A_j}^3{}_d{A_k}^{dc} - \varepsilon_{abc}{A_j}^c{}_d{A_k}^{d3})\varepsilon^{abf}\delta\omega_{if} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-2\varepsilon_{abc}\partial_j{A_k}^{3c} + 2\varepsilon_{abc}{A_j}^3{}_d{A_k}^{dc})\varepsilon^{abf}\delta\omega_{if} \\
&= \sqrt{\Lambda}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{abc}(-\partial_je^c_k + \varepsilon^{dcg}e_{jd}\omega_{kg})\varepsilon^{abf}\delta\omega_{if} \\
&= \sqrt{\Lambda}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abf}\varepsilon_{abc}(-\partial_je^c_k - {\varepsilon^c}_{gd}{\omega_k}^ge^d_j)\delta\omega_{if} \\
&= -2\sqrt{\Lambda}(\partial_je^f_k + {\varepsilon^f}_{gd}{\omega_k}^ge^d_j)\delta\omega_{if}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Ahora desarrollamos el caso $A = 3$ y $B = b$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{3bcd}(\partial_j {A_k}^{cd} - {A_j}^c{}_E {A_k}^{Ed})\delta {A_i}^{3b} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{bcd}(\partial_j {A_k}^{cd} - {A_j}^c{}_3 {A_k}^{3d} - {A_j}^c{}_e {A_k}^{ed})\delta {A_i}^{3b} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{bcd}(\partial_j \varepsilon^{cdf}\omega_{kf} + \Lambda e^c_j e^d_k - \varepsilon^c{}_e{}^g \varepsilon^{edh}\omega_{jg}\omega_{kh})\delta {A_i}^{3b} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\varepsilon_{bcd}\varepsilon^{cdf}\partial_j \omega_{kf} + \varepsilon_{bcd}\Lambda e^c_j e^d_k - \varepsilon_{bcd}\varepsilon^c{}_e{}^g \varepsilon^{edh}\omega_{jg}\omega_{kh})\delta {A_i}^{3b} \qquad (4.87) \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}[-2\partial_j \omega_{kb} + \varepsilon_{bcd}\Lambda e^c_j e^d_k - (\delta^e_b\delta^h_c + \delta^e_c\delta^h_b)\varepsilon^c{}_e{}^g\omega_{jg}\omega_{kh}]\sqrt{\Lambda}\delta e^b_i \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-2\partial_j \omega_{kb} + \varepsilon_{bcd}\Lambda e^c_j e^d_k - \varepsilon^h{}_b{}^g\omega_{jg}\omega_{kh})\sqrt{\Lambda}\delta e^b_i \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\varepsilon^{ijk}(2\partial_j \omega_{kb} + \varepsilon_{bcd}{\omega_j}^c{\omega_k}^d - \varepsilon_{bcd}\Lambda e^c_j e^d_k)\delta e^b_i,
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado las identididades 4.11 y 4.82. Uniendo los resultados obtenidos para los distintos caso de A, las ecuaciones de movimiento para I_{3+4} son entonces

$$
-2\sqrt{\Lambda}(\partial_j e^f_k + \varepsilon^f{}_{gd}{\omega_k}^g e^d_j)\delta\omega_{if} \qquad (4.88)
$$

$$
\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(2\partial_j \omega_{kb} + \varepsilon_{bcd}{\omega_j}^c{\omega_k}^d - \varepsilon_{bcd}\Lambda e^c_j e^d_k)\sqrt{\Lambda}\delta e^b_i. \qquad (4.89)
$$

Ahora podemos escribir la variación del lagrangiano de Chern-Simons autod-dual para los casos donde $A = 3$ y $B = b$

$$
\begin{aligned}
\delta I_{3b} = \int_X d^3x\varepsilon^{ijk}[&\sqrt{\Lambda}(\partial_j e_{kb} + {\varepsilon_b}^{ac}\omega_{ja}e_{kc}) \\
&\mp \frac{i}{2}(2\partial_j \omega_{kb} + \varepsilon_{bcd}{\omega_j}^c{\omega_k}^d - \varepsilon_{bcd}\Lambda e^c_j e^d_k)]\sqrt{\Lambda}\delta e^b_i.
\end{aligned} \qquad (4.90)
$$

Mientras que para el caso donde $A = a$ y $B = b$ se obtuvo

$$
\begin{aligned}
\delta I_{ab} = -\int_X d^3x\varepsilon^{ijk}[&(2\partial_j {\omega_k}^f + \varepsilon^f{}_{ab}{\omega_j}^a{\omega_k}^b - \Lambda\varepsilon^f{}_{ab}e^a_j e^b_k) \\
&\pm 2i\sqrt{\Lambda}(\partial_j e^c_k + \varepsilon^c{}_{gd}{\omega_k}^g e^d_j)]\delta\omega_{if}.
\end{aligned} \qquad (4.91)
$$

Ahora, la variación total de dicha acción será la suma de las dos anteriores, $\delta I = \delta I_{3b} + \delta I_{ab}$. Resaltamos el hecho de que $\delta {A_i}^{3b} = \sqrt{\Lambda}\delta e^b_i$ ya que al considerar $\Lambda = 0$ se tiene que esta parte de la variación no contribuirá a las ecuaciones de movimiento, $\delta I_{3b}(\Lambda = 0) = 0$. Por lo que solo tenemos una contribución variando respecto a $A_i{}^{ab}$

$$
\begin{aligned}
\delta I(\Lambda = 0) &= -\int_X d^3x \varepsilon^{ijk}(2\partial_j \omega_k{}^f + \varepsilon^f{}_{ab}\omega_j{}^a\omega_k{}^b)\delta\omega_{if} \\
&= -\int_X dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k (2\partial_j \omega_k{}^f + \varepsilon^f{}_{ab}\omega_j{}^a\omega_k{}^b)\delta\omega_{if} \\
&= -2\int_X (d\omega^f + \frac{1}{2}\varepsilon^f{}_{ab}\omega^a \wedge \omega^b) \wedge \delta\omega_f \\
&= -2\int_X F^f \wedge \delta\omega_f.
\end{aligned} \tag{4.92}
$$

Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$F = 0, \tag{4.93}$$

que son simplemente las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica nula.

Por otro lado, puede verse que las ecuaciones de movimiento arrojadas de la variación de δI_{3b} y δI_{ab} pueden ser reescritas en lenguaje de formas como

$$\Lambda D_\omega e \mp i\sqrt{\Lambda}(F - \Lambda e \wedge e) = 0, \tag{4.94}$$

$$F - \Lambda e \wedge e \mp i\sqrt{\Lambda} D_\omega e = 0. \tag{4.95}$$

Comparando este resultado con el obtenido en las ecuaciones 4.42 y 4.43 se pueden obtener los valores de las constantes **a** y **b**, los cuales son

$$a = \mp 2i\sqrt{\Lambda}, \quad b = 1. \tag{4.96}$$

Con esto hemos logrado obtener las ecuaciones de movimiento de las acciones estándar y exótica a partir del lagrangiano de Chern-Simons autodual tras hacer su variación respecto al campo de norma y darle los valores correspondientes a sus índices de grupo.

Finalmente reescribimos 4.44 como una combinación lineal de las acciones 4.3 y 4.28 con los valores encontrados en 4.96

$$\begin{aligned} L_{CS}^{\pm} = 4\int \frac{1}{2}[\omega\wedge(d\omega+\frac{2}{3}\omega\wedge\omega)+2\Lambda\omega\wedge e\wedge e+\Lambda e\wedge de] \\ \mp i\sqrt{\Lambda}e\wedge(F+\frac{1}{3}\Lambda e\wedge e). \end{aligned} \tag{4.97}$$

Capítulo 5

Gravedad en cuatro dimensiones

MacDowell, Mansouri, Pagels y otros autores [8] introdujeron teorías de campo para las cuales la acción era completamente independiente de la métrica y la conexión de Christoffel. Dichas teorías están relacionadas al formalismo de Chern-Simons, discutido en el capítulo 2. Los campos fundamentales en la acción de MacDowell-Mansouri (MM) son los campos de norma para un grupo apropiado G donde $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ son obtenidas como combinaciones de estos campos. Como consecuencia se tiene que la relatividad general estándar se puede obtener de esta construcción.

Como se mencionó, haremos un tratamiento parecido al del capítulo 2; tomaremos la acción, que en este caso será la de MM, y propondremos una más general [6]. De aquí obtendremos la acción original y otros términos que resultarán ser invariantes topológicos. Así mismo, se derivarán las ecuaciones de movimiento para ambas teorías y mostraremos que son equivalentes.

5.1. MacDowell-Mansouri

En la teoría de MM se considera el potential de norma ${\omega_\mu}^{AB}(x)$ donde los índices $\mu = 0, 1, 2, 3$ corresponden a un espacio base cuatro-dimensional M, y los índices $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ son asociados a la fibra[1] anti-de Sitter con grupo SO(3,2). De este potencial ${\omega_\mu}^{AB}$ se introduce la curvatura

$$\mathscr{R}^{AB}_{\mu\nu} = \partial_\mu {\omega_\nu}^{AB} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{AB} + \frac{1}{2} f^{[AB]}_{[[CD][EF]]} {\omega_\mu}^{CD} {\omega_\nu}^{EF}, \tag{5.1}$$

donde $f^{[AB]}_{[[CD][EF]]}$ son las constantes de estructura de SO(3,2). La notación sobre los índices de grupo $[AB]$ denota antisimetrización. Para el potencial y curvatura no se utilizarán los corchetes, aunque se tiene que tener en mente que son antisimétricos.

Consideremos ahora los generadores $S_{AB} = -S_{BA}$ del álgebra anti-de Sitter SO(3,2) que satisfacen

$$[S_{AB}, S_{CD}] = f^{[EF]}_{[[AB][CD]]} S_{EF}. \tag{5.2}$$

Sabemos que las constantes de estructura para este caso están dadas por

$$\begin{aligned} f^{[EF]}_{[[AB][CD]]} =& \frac{1}{2}[\eta_{AC}\delta^E_B\delta^F_D - \eta_{AD}\delta^E_B\delta^F_C + \eta_{BD}\delta^E_A\delta^F_C \\ &- \eta_{BC}\delta^E_A\delta^F_D] - (E \leftrightarrow F), \end{aligned} \tag{5.3}$$

Y dando valores a los índices de la expresión anterior, encontramos las siguientes ecuaciones

$$f^{[4a]}_{[[4b][ec]]} = 0, \quad f^{[4d]}_{[[ab][cd]]} = 0, \quad f^{[ab]}_{[[4c][de]]} = 0, \tag{5.4}$$

$$f^{[4a]}_{[[4b][cd]]} = \frac{1}{2}[\eta_{bd}\delta^a_c - \eta_{bc}\delta^a_d] \tag{5.5}$$

$$f^{[ab]}_{[[4c][4d]]} = \frac{\Lambda^2}{2}[-\delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_d\delta^b_c] \tag{5.6}$$

[1]Para una defინción del término ver [3].

$$f^{[ab]}_{[[cd][ef]]} = \frac{1}{2}[\eta_{ce}\delta^a_d\delta^b_f - \eta_{cf}\delta^a_d\delta^b_e + \eta_{df}\delta^a_c\delta^b_e \quad -\eta_{de}\delta^a_c\delta^b_f] \\ -(a \leftrightarrow b), \tag{5.7}$$

donde los índices a, b corren de 0 a 3. Ahora veamos la consecuencia de sustituir 5.4-5.7 en 5.1, considerando que $\omega^{4a}_\mu \equiv e^a_\mu$. Encontramos

$$\mathscr{R}^{4a}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + e^b_\mu \omega_{\nu b}{}^a - \omega_{\mu b}{}^a e^b_\nu, \tag{5.8}$$

$$\mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} = R^{ab}_{\mu\nu} - \Lambda^2(e^a_\mu e^b_\nu - e^a_\nu e^b_\mu), \tag{5.9}$$

$$\Sigma^{ab}_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu - e^a_\nu e^b_\mu, \tag{5.10}$$

$$R^{ab}_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ca}\omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu{}^{ca}\omega_{\mu c}{}^b. \tag{5.11}$$

Identificamos a 5.8 como la torsión y a 5.9 como la curvatura. Ahora escribimos las ecuaciones 5.9, 5.10 y 5.1 en el lenguaje de formas diferenciales

$$\mathscr{R}^{ab} = R^{ab} - \Lambda^2 \Sigma^{ab}, \tag{5.12}$$

$$\Sigma^{ab} = e^a \wedge e^b, \tag{5.13}$$

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ca} \wedge \omega_c{}^b. \tag{5.14}$$

Introducimos ahora la acción de la teoría de MacDowell-Mansouri

$$S_{MM} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{abcd} \mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} \mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta}, \tag{5.15}$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el símbolo de permutación, una densidad tensorial con $\epsilon^{0123} = 1$ y para contraer los índices del grupo SO(3,2) se emplea ϵ_{abcd}.

Utilizando la identidad $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} d^4x = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta$ y que el dual de $\mathscr{R}^{ab}$ se escribe como $\hat{\mathscr{R}}^{ab} = -\frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_{cd}\mathscr{R}^{cd}$ reescribimos la acción 5.15 con formas diferenciales

$$
\begin{aligned}
S_{MM} &= \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{abcd} \mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} \mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta} \\
&= \int dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \epsilon_{abcd} \mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} \mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta} \\
&= \int \mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge (\epsilon_{abcd} \mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta) \\
&= 2i \int \mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge (-\frac{i}{2} \epsilon_{abcd} \mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta) \\
&= 8i \int \mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab} \\
&= 8i \int Tr(\mathscr{R} \wedge \hat{\mathscr{R}}).
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

De aquí podemos mostrar los términos contenidos en la acción sustituyendo 5.12 en 5.15. Con esto se tienen tres términos $R \wedge \hat{R} - 2\Lambda^2 \hat{\Sigma} \wedge R + \Lambda^4 \Sigma \wedge \hat{\Sigma}$ los cuales son el término topológico de Euler, Hilbert-Einstein y el término cosmológico, respectivamente.

Habiendo obtenido la acción de MM con formas diferenciales, realizamos la variación respecto al campo $\mathscr{R}^{ab}$

$$
\begin{aligned}
\delta S_{MM} &= 8i \int \delta(\mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab}) \\
&= 8i \int (\delta\mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab} + \mathscr{R}^{ab} \wedge \delta\hat{\mathscr{R}}_{ab}) \\
&= 8i \int [\delta\mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab} + \mathscr{R}^{ab} \wedge \delta(-\frac{i}{2} \epsilon_{ab}{}^{cd} \mathscr{R}_{cd})] \\
&= 8i \int [\delta\mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab} + (-\frac{i}{2} \epsilon_{ab}{}^{cd} \mathscr{R}^{ab}) \wedge \delta\mathscr{R}_{cd}] \\
&= 8i \int (\delta\mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab} + \hat{\mathscr{R}}^{cd} \wedge \delta\mathscr{R}_{cd}) \\
&= 16i \int \delta\mathscr{R}^{ab} \wedge \hat{\mathscr{R}}_{ab} \\
&= 16i \int Tr(\delta\mathscr{R} \wedge \hat{\mathscr{R}}).
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

Dejando la traza implícita, así como los índices de grupo, consideraremos la variación 5.17 para la uno-forma ω como sigue

$$
\begin{aligned}
\delta_\omega S_{MM} &= 16i\int \delta(d\omega + \omega\wedge\omega - \Lambda^2 e\wedge e)\wedge\hat{\mathscr{R}} \\
&= 16i\int \delta(d\omega + \omega\wedge\omega)\wedge\hat{\mathscr{R}} \\
&= 16i\int [\delta d\omega + \delta(\omega\wedge\omega)]\wedge\hat{\mathscr{R}} \\
&= 16i\int [\delta d\omega\wedge\hat{\mathscr{R}} + \delta(\omega\wedge\omega)\wedge\hat{\mathscr{R}}] \\
&= 16i\int (\delta\omega\wedge d\hat{\mathscr{R}} + \delta\omega\wedge\omega\wedge\hat{\mathscr{R}} + \omega\wedge\delta\omega\wedge\hat{\mathscr{R}}) \\
&= 16i\int (\delta\omega\wedge d\hat{\mathscr{R}} + \delta\omega\wedge\omega\wedge\hat{\mathscr{R}} - \delta\omega\wedge\hat{\mathscr{R}}\wedge\omega) \\
&= 16i\int \delta\omega\wedge(d\hat{\mathscr{R}} + [\omega,\hat{\mathscr{R}}]) \\
&= 16i\int \delta\omega\wedge D_\omega\hat{\mathscr{R}},
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

en donde se integró por partes y se empleó la definción de derivada covariante. Entonces, la ecuación de movimiento de la acción 5.17 para ω es

$$D_\omega\hat{\mathscr{R}} = 0. \tag{5.19}$$

Sabemos que la relación entre $\hat{\mathscr{R}}$ y $\mathscr{R}$ es lineal, por lo que podemos escribir 5.19 de una manera alterna

$$
\begin{aligned}
D_\omega\hat{\mathscr{R}} &\sim D_\omega\mathscr{R} \\
&= D_\omega(R - \Lambda^2\Sigma) \\
&= D_\omega R - \Lambda^2 D_\omega\Sigma.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Para reducir aún más 5.19, mostraremos que $D_\omega R = 0$ y así llegar al resultado deseado

$$\begin{aligned}
D_\omega R &= dR + [\omega, R] \\
&= d(d\omega + \omega \wedge \omega) + [\omega, R] \\
&= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega + [\omega, R] \\
&= d\omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\
&\quad - \omega \wedge \omega \wedge \omega + [\omega, R] \\
&= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) \\
&\quad + [\omega, R] \\
&= R \wedge \omega - \omega \wedge R + [\omega, R] \\
&= -[\omega, R] + [\omega, R] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Por lo que la ecuación de movimiento para ω se denota simplemente como

$$D_\omega \Sigma = 0. \tag{5.22}$$

Procedemos a tomar 5.17 y considerar la variación ahora respecto a e

$$\begin{aligned}
\delta_\omega S_{MM} &= 16i \int \delta(d\omega + \omega \wedge \omega - \Lambda^2 e \wedge e) \wedge \hat{\mathscr{R}} \\
&= -16i\Lambda^2 \int \delta(e \wedge e) \wedge \hat{\mathscr{R}} \\
&= -16i\Lambda^2 \int (\delta e \wedge e + e \wedge \delta e) \wedge \hat{\mathscr{R}} \\
&= -32i\Lambda^2 \int \delta e \wedge e \wedge \hat{\mathscr{R}}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Tenemos que la ecuación de movimiento es

$$e \wedge \hat{\mathscr{R}} = 0. \tag{5.24}$$

De nuevo, dado que $\hat{\mathscr{R}}$ es lineal a $\mathscr{R}$ tomaremos ventaja de esto para simplificar nuestro resultado como sigue:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{R}} &\sim \mathscr{R} \\
&= R - \Lambda^2 \Sigma.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

De aquí que 5.24 la reescribimos como

$$R = \Lambda^2 \Sigma. \tag{5.26}$$

En resumen, a partir de la acción de MacDowell-Mansouri recuperamos las ecuaciones de Einstein y obtuvimos la ecuación de constricción que indica que es libre de torsión

$$R = \Lambda^2 \Sigma. \tag{5.27}$$

$$D_\omega \Sigma = 0. \tag{5.28}$$

5.2. MacDowell-Mansouri autodual

Una forma más general de la acción de MM escrita en 5.15, es considerar el campo de norma autodual

$$^{+}S_{MM} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{abcd} {}^{+}\mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} {}^{+}\mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta}. \tag{5.29}$$

que se construye a partir de la conexión autodual

$$^{+}\omega_\mu{}^{ab} = \frac{1}{2}(\omega_\mu{}^{ab} - \frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_{cd}\omega_\mu{}^{cd}). \tag{5.30}$$

De igual manera, se toman para el resto de los campos que nos interesan:

$$^{+}\Sigma_{\mu\nu}{}^{ab} = \frac{1}{2}(\Sigma_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_{cd}\Sigma_{\mu\nu}{}^{cd}), \tag{5.31}$$

$$^{+}R_{\mu\nu}{}^{ab} = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_{cd}R_{\mu\nu}{}^{cd}), \tag{5.32}$$

$$^{+}\mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu} = {}^{+}R^{ab}_{\mu\nu} - \Lambda^{2+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}. \tag{5.33}$$

Con las ecuaciones anteriores desarrollamos 5.29 dejando implícita la integral por el momento

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}{}^{+}\mathscr{R}^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}\mathscr{R}^{cd}_{\alpha\beta} &= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}({}^{+}R^{ab}_{\mu\nu} - \Lambda^{2+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu})({}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} - \Lambda^{2+}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta}) \\
&= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}({}^{+}R^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} - \Lambda^{2+}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta}{}^{+}R^{ab}_{\mu\nu} \\
&\qquad - \Lambda^{2+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} + \Lambda^{4}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta}) \qquad (5.34) \\
&= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}({}^{+}R^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} - 2\Lambda^{2+}\Sigma^{ab}_{\alpha\beta}{}^{+}R^{cd}_{\mu\nu} \\
&\qquad + \Lambda^{4+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

Tomamos el primer término de la expresión anterior y desarrollamos según la definición de ${}^{+}R$ dada en 5.32.

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}{}^{+}R^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}[(R_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_{ef}R_{\mu\nu}{}^{ef})(R_{\alpha\beta}{}^{cd} - \frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_{hg}R_{\alpha\beta}{}^{hg})] \\
&= \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}(R^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}R^{ab}_{\mu\nu}\epsilon^{ab}{}_{hg}R_{\alpha\beta}{}^{hg} \\
&\qquad - \frac{i}{2}R^{cd}_{\alpha\beta}\epsilon^{ab}{}_{ef}R_{\mu\nu}{}^{ef} - \frac{1}{4}\epsilon^{ab}{}_{hg}\epsilon^{ab}{}_{ef}R_{\mu\nu}{}^{ef}R_{\alpha\beta}{}^{hg}) \\
&= \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}(R^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} - iR^{ab}_{\mu\nu}\epsilon^{ab}{}_{hg}R_{\alpha\beta}{}^{hg} \\
&\qquad - \frac{1}{4}\epsilon^{ab}{}_{hg}\epsilon^{ab}{}_{ef}R_{\mu\nu}{}^{ef}R_{\alpha\beta}{}^{hg}).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Empleamos la siguiente identidad en el segundo y tercer término de la ecuación anterior

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{ab}{}_{ef} = -2(\eta_{ce}\eta_{df} - \eta_{cf}\eta_{de}), \tag{5.36}$$

para así llegar a

$$\begin{aligned}
\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}{}^{+}R^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}R^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} \\
&\quad + i\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{ac}\eta_{bd}R^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Aplicamos la misma metodología al término cruzado ${}^{+}\Sigma^{+}R$ de 5.34 para obtener

$$
\begin{aligned}
-2\Lambda^2 \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}{}^{+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} = & -\Lambda^2 \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} \\
& - 2i\Lambda^2 \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{ac}\eta_{bd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

Para el último término ${}^{+}\Sigma^{+}\Sigma$ tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
\Lambda^4 \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}{}^{+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}{}^{+}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta} = & \frac{\Lambda^4}{2} \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta} \\
& + i\Lambda^4 \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{ac}\eta_{bd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

Uniendo 5.37, 5.38 y 5.39 vemos que la acción de MacDowell-Mansouri autodual queda de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}S_{MM} = & \frac{1}{2}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}R^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} + i\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{ac}\eta_{bd}R^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} \\
& - \Lambda^2\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} - 2i\Lambda^2\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{ac}\eta_{bd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}R^{cd}_{\alpha\beta} \\
& + \frac{\Lambda^4}{2}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{abcd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta} + i\Lambda^4\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{ac}\eta_{bd}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\Sigma^{cd}_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

Reescribiendolo este resultado en notación de formas diferenciales se llega a

$$
\begin{aligned}
{}^{+}S_{MM} = & 4i\int R\wedge\hat{R} + 4i\int R\wedge R - 8i\Lambda^2\int\Sigma\wedge\hat{R} \\
& - 8i\Lambda^2\int\Sigma\wedge R + 4i\Lambda^4\int\Sigma\wedge\hat{\Sigma} + 4i\Lambda^4\int\Sigma\wedge\Sigma.
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

El segundo término se le conoce como el invariante de Pontrjagin, mientras que el cuarto y sexto son no dinámicos. El resto son los encontrados en la teoría de MM. Por lo se ha mostrado explícitamente que la teoría auto-dual tiene contenida a la original.

Ahora comenzamos la derivación de las ecuaciones de movimiento para esta nueva teoría. Tomamos entonces la variación de la acción

$$\begin{aligned}\delta^+ S_{MM} = 4i\int \delta R\wedge\hat{R} + 4i\int R\wedge\delta\hat{R} + 4i\int\delta R\wedge R + 4i\int R\wedge\delta R \\ - 8i\Lambda^2\int\delta\Sigma\wedge\hat{R} - 8i\Lambda^2\int\Sigma\wedge\delta\hat{R} - 8i\Lambda^2\int\delta\Sigma\wedge R \\ - 8i\Lambda^2\int\Sigma\wedge\delta R + 4i\Lambda^4\int\delta\Sigma\wedge\hat{\Sigma} + 4i\Lambda^4\int\Sigma\wedge\delta\hat{\Sigma} \\ + 4i\Lambda^4\int\delta\Sigma\wedge\Sigma + 4i\Lambda^4\int\Sigma\wedge\delta\Sigma.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Sumamos y agrupamos términos

$$\begin{aligned}\delta^+ S_{MM} &= 4i\int(\delta R\wedge\hat{R} + R\wedge\delta\hat{R}) + 8i\int\delta R\wedge R \\ &\quad - 8i\Lambda^2\int(\delta\Sigma\wedge\hat{R} + \Sigma\wedge\delta\hat{R} + \delta\Sigma\wedge R \\ &\quad + \Sigma\wedge\delta R) + 4i\Lambda^4\int(\delta\Sigma\wedge\hat{\Sigma} + \Sigma\wedge\delta\hat{\Sigma}) \\ &\quad + 8i\Lambda^4\int\Sigma\wedge\delta\Sigma.\end{aligned} \tag{5.43}$$

Para seguir reduciendo la ecuación tenemos que mostrar primero que $R\wedge\delta\hat{R} = \delta R\wedge\hat{R}$ lo cual sirve también para mostrar que $\Sigma\wedge\delta\hat{\Sigma} = \delta\Sigma\wedge\hat{\Sigma}$

$$\begin{aligned}R\wedge\delta\hat{R} &= (\frac{1}{2}R^{ab}_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu)\wedge\delta(-\frac{i}{4}\epsilon_{abcd}R^{cd}_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta) \\ &= (-\frac{i}{4}\epsilon_{abcd}R^{ab}_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu)\wedge\delta(\frac{1}{2}R^{cd}_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta) \\ &= \hat{R}\wedge\delta R \\ &= \delta R\wedge\hat{R}.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Continuamos reduciendo 5.43

$$\begin{aligned}
\delta^{+}S_{MM} &= 8i\int \delta R\wedge \hat{R} + 8i\int \delta R\wedge R \\
&- 8i\Lambda^2\int (\delta\Sigma\wedge\hat{R} + \Sigma\wedge\delta\hat{R} + \delta\Sigma\wedge R + \Sigma\wedge\delta R) \\
&+ 8i\Lambda^4\int \delta\Sigma\wedge\hat{\Sigma} + 8i\Lambda^4\int \Sigma\wedge\delta\Sigma \\
&= 8i\int \delta R\wedge(\hat{R}+R) \\
&- 8i\Lambda^2\int [\delta\Sigma\wedge(R+\hat{R}) + \delta R\wedge(\Sigma+\hat{\Sigma})] \\
&+ 8i\Lambda^4\int \delta\Sigma\wedge(\hat{\Sigma}+\Sigma).
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Ahora utilizamos las definiciones de la parte autodual de R y Σ: ${}^{+}R = \frac{1}{2}(R+\hat{R})$ y ${}^{+}\Sigma = \frac{1}{2}(\Sigma+\hat{\Sigma})$ reescribimos

$$\begin{aligned}
\delta^{+}S_{MM} &= 8i\int \delta R\wedge {}^{+}R \\
&- 8i\Lambda^2\int (\delta\Sigma\wedge {}^{+}R + \delta R\wedge {}^{+}\Sigma) \\
&+ 8i\Lambda^4\int \delta\Sigma\wedge {}^{+}\Sigma.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Teniendo hecha la simplificación, consideramos la variación respecto a la conexión ω por lo que tendremos que la variación solo dependerá de δR.

$$\begin{aligned}
\delta^{+}S_{MM} &= 8i\int \delta R \wedge {}^{+}R - 8i\Lambda^{2}\int \delta R \wedge {}^{+}\Sigma \\
&= 8i\int \delta(d\omega + \omega\wedge\omega)\wedge({}^{+}R - \Lambda^{2+}\Sigma) \\
&= 8i\int [\delta d\omega \wedge {}^{+}R + \delta(\omega\wedge\omega)\wedge {}^{+}R] \\
&- \Lambda^{2}[\delta d\omega \wedge {}^{+}\Sigma + \delta(\omega\wedge\omega)\wedge {}^{+}\Sigma] \\
&= 8i\int (\delta\omega \wedge d^{+}R + \delta\omega\wedge\omega\wedge {}^{+}R - \delta\omega\wedge {}^{+}R\wedge\omega) \\
&- \Lambda^{2}(\delta\omega\wedge d^{+}\Sigma + \delta\omega\wedge\omega\wedge {}^{+}\Sigma - \delta\omega\wedge {}^{+}\Sigma\wedge\omega) \\
&= 8i\int \delta\omega\wedge[(d^{+}R + [\omega, {}^{+}R]) - \Lambda^{2}(d^{+}\Sigma + [\omega, {}^{+}\Sigma])] \\
&= 8i\int \delta\omega\wedge(D_{\omega}{}^{+}R - \Lambda^{2}D_{\omega}{}^{+}\Sigma).
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Por lo que la ecuación de movimiento será

$$D_{\omega}{}^{+}R = \Lambda^{2}D_{\omega}{}^{+}\Sigma. \tag{5.48}$$

En 5.21 se mostró que $D_{\omega}R = D_{\omega}\hat{R} = 0$, por lo que tenemos que la ecuación de movimiento respecto a ω es

$$D_{\omega}{}^{+}\Sigma = 0. \tag{5.49}$$

Ahora consideramos la variación respecto a la tetrada e, por lo que se consideraran los términos que involucren $\delta\Sigma$

$$\begin{aligned}
\delta^{+}S_{MM} &= 8i\Lambda^{4}\int \delta\Sigma\wedge {}^{+}\Sigma - 8i\Lambda^{2}\int \delta\Sigma\wedge {}^{+}R \\
&= 8i\Lambda^{2}\int \delta\Sigma\wedge(\Lambda^{2+}\Sigma - {}^{+}R) \\
&= 8i\Lambda^{2}\int \delta(e\wedge e)\wedge(\Lambda^{2+}\Sigma - {}^{+}R) \\
&= 16i\Lambda^{2}\int \delta e\wedge e\wedge(\Lambda^{2+}\Sigma - {}^{+}R).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Llegamos entonces a que la ecuación de movimiento para el caso de la tetrada e es

$$^{+}R = \Lambda^{2+}\Sigma. \tag{5.51}$$

La acción de MacDowell-Mansouri Autodual nos arrojó las siguientes ecuaciones de movimiento tras hacer las consideraciones en 5.46 para la conexión y la tetrada.

$$^{+}R = \Lambda^{2+}\Sigma, \tag{5.52}$$

$$D_{\omega}{}^{+}\Sigma = 0. \tag{5.53}$$

Haciendo una comparación con las ecuaciones 5.27 y 5.28 vemos que tienen la misma forma. Por lo que ambas teorías tienen una dinámica similar, esto se debe a solo difieren en tres términos topológicos que no se ven reflejados en la dinámica, como ya se había discutido.

Capítulo 6

Conclusiones

El estudio de teorías de la gravedad donde la métrica deja de ser el campo fundamental permiten describir esta interacción en un marco poco usual. Expresar la acción de Hilbert-Einstein como una teoría de norma, donde el tensor métrico es una consecuencia de la formulación, ha dado pie a entender el funcionamiento de la gravitación cuántica en dimensiones bajas. Lamentablemente, como se ha mencionado, aún no contamos con una teoría cuántica de la gravedad en cuatro dimensiones, aunque existen esfuerzos sólidos de ello.

Siendo que el objetivo de este trabajo **no** es enteder cómo estas teorías se utilizan para describir gravedad cuántica, se hizo una revisión acerca de la dinámica a partir de estas teorías en distintas dimensiones; dos, tres y cuatro. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios ya que se lograron obtener las ecuaciones de campo de Einstein para dichas propuestas; Jackiw-Teitelboim, Chern-Simons y MacDowell-Mansouri.

En el caso dos-dimensional se comenzó definiendo la curvatura a partir del campo de norma para después hacer una construcción de la acción basados en distintas condiciones para la curvatura 3.11; dado que el grupo del que partimos no cuenta con una forma no-degenerada bilineal, fue necesario deformar el álgebra de Poincaré a la de de Sitter. Con esto se logró hacer la generalización del modelo de Jackiw-Teitelboim a una teoría de norma para el grupo SO(2,1). La construcción anterior es consistente con las ecuaciones de campo de Einstein, lo cual puede apreciarse en 3.23.

Pasando a una dimensión mayor, mostramos dos acciones equivalentes que simplemente son una forma de escribir 2.27 en un formalismo de primer orden. Tomamos una combinación lineal de ellas con constantes arbitrarias y dedujimos 4.42 y 4.43. Después tomamos una generalización de la teoría de norma tipo Chern-Simons. Se tomó una variación respecto al campo de norma para encontrar las ecuaciones de movimiento. Tras esto fueron sustituidos los valores del campo apropiados; para los casos A=a, B=b y A=3, B=b. Con esto se obtuvieron 4.94 y 4.95. Finalmente se hizo una comparación para encontrar las constantes de la combinación lineal hecho en un principio. Finalmente, se propuso el lagrangiano 4.97 como una manera alterna de escribir 4.44. Por lo que hemos logrado mostrar que la teoría generaliza tipo Chern-Simons para gravedad en 2+1 puede ser escrita como una combinación lineal de las acciones estándar y exótica.

Por otro lado, se trabajó con la generalización de otra teoría de norma para el caso de cuatro dimensiones. El primer paso fue estudiar la dinámica de la teoría de MacDowell-Mansouri en un formalismo de formas, con el paso intermedio de mostrar los invariantes topológicos que se encuentran codificados en la acción. Tras obtener las ecuaciones de movimiento se pasó a la teoría auto-dual de MacDowell-Mansouri. Un desgloce de la acción nos permitió ver los términos topológicos contenidos; Euler y cosmológico. Por último se mostró que la dinámica de esta teoría tiene la misma forma que la no generalizada. Esto se debe a que ambas teorías difieren por tres términos topológicos que no aportan a la dinámica.

Cabe resaltar que todo este tratamiento se realizó sin considerar contribuciones de materia. Todas estas teorías se ven modificadas en su lagrangiano, por lo que las ecuaciones de movimiento tendrán términos extra relacionados a distribuciones de masa o energía.

Apéndice A

Geometría del espaciotiempo

El objetivo de este partado es presentar las herramientas básicas para hacer los desarrollos presentados en este trabajo. Así mismo, nos interesa que el lector pueda tener una noción sobre dónde se *sitúan* algunas de las teorías aquí presentadas.

No se harán demostraciones formales ni se discutirán de manera profunda algunas definiciones.

A.1. Variedades

Para trabajar con física moderna necesitamos poder hacer operaciones sobre espacios más generales que el ya conocido $\mathbf{R^n}$. Para el caso de relatividad general, nos interesarán espacios que *localmente* son parecidos a $\mathbf{R^n}$, pero quizá no globalmente. A tal espacio se le denomina **variedad** n-dimensional. Por ejemplo, la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{A.1}$$

se ve localmente como el plano $\mathbf{R^2}$.

Una de las motivaciones para estudiar este tipo de espacios se encuentra en relatividad general, especificamente en el principio de equivalencia. Estaremos interesados en aquellos espacios que no presentan singularidades, lo que nos permitirá definir operaciones sobre estos espacios. A pesar de que nos vemos forzados a desarrollar una matemática para espacios generales, es más sencillo utilizar las herramientas ya conocidas sobre $\mathbf{R^n}$ y promoverlas a estas geometrías.

La característica más importante que presentan las variedades es que pueden ser cubiertas por *parches* coordenados, los cuales son localmente[1] parecidos a $\mathbf{R^n}$, como es el caso ya mencionado de la esfera. De hecho, en la Tierra podemos definir lugares que son totalmente planos, aunque si observamos desde lejos veremos que esto no es acertado.

A.2. Vectores y tensores

Para el caso de cuatro dimensiones, el vector toma otro nombre que es el de *cuadrivector*. Sus propiedades de transformación sigue siendo las mismas, aunque será invariante bajo las matrices que forman al grupo SO(3,1)[2].

En la noción presentada de espacios no planos, a cada punto del espaciotiempo le asignamos el conjunto de todos los posibles vectores localizados sobre dicho punto; a este conjunto se le conoce como el **espacio tangente**, o T_p.

Ahora, cada vector A puede ser escrito como una combinación lineal de sus vectores bases:

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu, \tag{A.2}$$

donde A^μ son las componentes del vector mientras que $\hat{e}_\mu$ son los vectores

[1]En nuestro caso nos interesarán aquellos que localmente son parecidos al espacio de Minkowski.

[2]En el caso euclidiano es SO(3).

base.

Dado un espacio vectorial, podemos definir su *dual*, conocido como **espacio vectorial dual**. Así que, el espacio dual a T_p se le conoce por **espacio cotangente** y se denota por T_p^*.

La forma en la que se opera sobre el espacio cotangente es la siguiente: si $\omega \in T_p^*$ es un vector dual, entonces

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbf{R}, \tag{A.3}$$

donde V, W son vectores y a, b son números reales.

Para hacer esta construcción un poco más concreta, introducimos un conjunto de vectores base duales $\hat{\theta}^\nu$ con la condición

$$\hat{\theta}^\nu(\hat{e}_\mu) = \delta^\nu_\mu. \tag{A.4}$$

Por lo que todo vector dual puede escribirse en términos de sus componentes y vectores base:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu. \tag{A.5}$$

Veamos ahora cómo trabajan los vectores duales sobre vectores:

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \omega_\mu \hat{\theta}^\mu (V^\nu \hat{e}_\nu) \\ &= \omega_\mu V^\nu \hat{\theta}^\mu \hat{e}_\nu \\ &= \omega_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu \\ &= \omega_\mu V^\mu \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Una generalización inmediata de vectores y vectores duales es la noción de tensor. Así como el vector dual es un mapeo lineal de vectores a $\mathbf{R}$, un tensor de tipo o rango (k, l) es un mapeo multilineal de una colección de vectores y vectores duales a $\mathbf{R}$:

$$T : T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times T_p \times \cdots \times T_p \to \mathbf{R}, \tag{A.7}$$

donde $\times$ reprenseta el producto cartesiano. Multilinearidad implica que el tensor actua linealmente en cada argumento; por ejemplo, un tensor de tipo $(1,1)$:

$$\begin{aligned} T(a\omega + b\eta, cV + dW) &= acT(\omega, V) \\ &\quad + adT(\omega, W) + bcT(\eta, V) + bdT(\eta, W). \end{aligned} \tag{A.8}$$

De aquí tenemos que, un escalar es un tensor tipo (0,0), un vector es un tipo (1,0) y un vector dual es un tipo (0,1).

A.3. Manipulación de tensores

Dado cualquier tensor, podemos **simetrizar** o antisimetrizar cualquier número de índices inferiores o superiores. Para hacer esto, tomamos la suma de todas las permutaciones de los índices de interés y dividimos por el número de términos:

$$T_{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma} + \text{permutaciones } \mu_1\ldots\mu_n), \tag{A.9}$$

mientras que la antisimetrización viene de una suma alternante

$$T_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_n]\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma} + \text{permutaciones alternantes } \mu_1\ldots\mu_n). \tag{A.10}$$

Por ejemplo:

$$T_{[\mu\nu\rho]\sigma} = \frac{1}{6}(T_{\mu\nu\rho\sigma} - T_{\mu\rho\nu\sigma} + T_{\rho\mu\nu\sigma} - T_{\nu\mu\rho\sigma} + T_{\nu\rho\mu\sigma} - T_{\rho\nu\mu\sigma}). \tag{A.11}$$

A.4. Formas diferenciales

Una p-forma diferencial es simplemente un tensor de tipo (0,p) que es completamente antisimétrico. Por lo que, 0-formas son escalares, y los vectores duales son 1-formas. El espacio de todas las p-formas se donota por

Λ^p, y el espacio de todas las p-formas sobre una variedad M es notada por $\Lambda^p(M)$. El número de p-formas linealmente independientes en un espacio n-dimensional es de:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{A.12}$$

Así que para un espacio de cuatro dimensiones tenemos una 0-forma, seis 2-formas, cuatro 3-formas y una 4-forma linealmente independientes. Dada una p-forma A y una q-forma B, podemos crear una (p+q)-forma conocida como el **producto wedge o cuña** $A \wedge B$ tomando el producto tensorial antisimetrizado:

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \ldots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \ldots \mu_{p+q}]}. \tag{A.13}$$

Por ejemplo, $p = 1$ y $q = 1$

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} = 2A_{[\mu} B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu, \tag{A.14}$$

donde hay que notar

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A. \tag{A.15}$$

Por lo que podemos alterar el orden del producto cuña si tenemos cuidado con los signos. La **derivada exterior** d nos permite diferenciar p-formas para obtener (p+1)-formas. Está definida como una derivada parcial antisimétrica:

$$(dA)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \ldots \mu_{(p+1)}]}. \tag{A.16}$$

El ejemplo más simple es el del gradiente, que es la derivada exterior de una 0-forma:

$$(d\phi)_\mu = \partial_\mu \phi, \tag{A.17}$$

la cual obedece una regla de Leibniz "modificadaçuando es aplicada al producto de formas:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \tag{A.18}$$

La derivada exterior también cumple con:

$$d(dA) = 0, \tag{A.19}$$

para cualquier p-forma A.

Otra operación de interés es la **dual de Hodge**. Es un operador que mapea p-formas a $(n-p)$-formas y se define como:

$$(\star A)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p}. \tag{A.20}$$

Si aplicamos de nuevo el operador se tiene:

$$\star \star A = (-1)^{s+p(n-p)} A, \tag{A.21}$$

donde s es el número de eigenvalores negativos de la métrica.

Una propiedad de la dual de Hodge es la siguiente: Se tienen dos 1-formas, U y V en un espacio tridimensional. Si tomamos el producto cuña de ambos y después le aplicamos el operador estrella:

$$\star (U \wedge V)_i = \epsilon_i{}^{jk} U_j V_k, \tag{A.22}$$

que es el conocido **producto cruz**. Por lo que tenemos un mapeo de dos vectores a un tercero. Lo anterior solamente se presenta en un espacio de 3 dimensiones. La aparición del tensor Levi-Civita explica el menos ante el cambio en el orden del producto cruz [3].

A.5. Los tensores de curvatura

Antes de definir a los tensores de curvatura, es necesario introducir la definición de **métrica**. Cualquier tensor simétrica de rango 2, digamos $g_a b$,

[3] $U \times V = -V \times U$

define una métrica. Una variedad dotada por una métrica se le llama variedad Riemanniana. La métrica puede ser usada para definir distancia y longitudes de vectores.

Por ejemplo, tomemos el intervalo infinitesimal, que llamaremos ds, entre dos punts cercanos x^a y $x^a + dx^a$ se define por

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b. \tag{A.23}$$

También podemos encontrar la norma de un vector con ayuda de g_{ab}

$$X^2 = g_{ab} X^a X^b. \tag{A.24}$$

Siguiendo con notación utilizada en el trabajo, el determinante de la métrica se escribe

$$g = det(g_{ab}). \tag{A.25}$$

Ahora, la métrica es no singular si $g \neq 0$, en este caso la inversa de g_{ab} la definimos por

$$g_{ab} g^{bc} = \delta^c_a. \tag{A.26}$$

Por último, mostraremos el uso de la métrica para subir y bajar índices. Tomemos los siguientes ejemplos de vectores y tensores

$$g_{ab} V^a = V_b, \tag{A.27}$$

$$g^{ab} V_a = V^b, \tag{A.28}$$

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\beta\alpha} = T_\nu{}^{\beta\alpha}, \tag{A.29}$$

$$g^{\alpha\beta} T_\beta{}^{\mu\nu} = T^{\alpha\mu\nu}, \tag{A.30}$$

por mencionar algunos.

Estamos ahora en posición de definir los tensores de curvatura; Riemann, Ricci y Einstein. Los cuales son necesarios para trabajar con el contenido del capítulo 2. Comenzamos con el tensor de **Riemann**, que se define como

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}, \tag{A.31}$$

donde Γ^a_{bc} es la conexión métrica dada por

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\partial_d g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}). \tag{A.32}$$

Por lo que, $R^a{}_{bcd}$ depende de la métrica en sus primeras y segundas derivadas.

Un tensor definido a partir del de Riemann es el tensor de **Ricci**. Se obtiene de hacer la contracción de a con c en A.31

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} = g^{cd} R_{dacb}. \tag{A.33}$$

Una contracción final define al **escalar de curvatura** o el escalar de Ricci

$$R = g^{ab} R_{ab}. \tag{A.34}$$

Estos últimos dos tensores los empleamos para definiar al tensor de Einstein como

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \tag{A.35}$$

el cual se emplea para definir las ecuaciones de movimiento para relatividad general a partir de la acción de Hilbert-Einstein.

A.6. Aplicación a electrodinámica

La electrodinámica provee un ejemplo muy interesante para la aplicación de estas herramientas. Comenzamos recordando las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times B - \partial_t E &= J, \\ \nabla \cdot E &= \rho, \\ \nabla \times E + \partial_t B &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned} \tag{A.36}$$

Ya es conocido que este conjunto de ecuaciones pueden ser escritas como:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu, \tag{A.37}$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0. \tag{A.38}$$

Una manera más compacta y elegante de escribirlas es con **formas diferenciales**.

$$d(\star F) = \star J, \tag{A.39}$$

$$dF = 0, \tag{A.40}$$

de A.40 se tiene que $F = dA$ o en componentes $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Bibliografía

[1] Assaf Shommer. *A pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity* .[arXiv:0709.3555]

[2] Klaus Fredenhagen, Katarzyna Rejzner. *QFT on curved spacetimes: axiomatic framework and examples.*[arXiv:1412.5125]

[3] John Baez, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific Publishing Company, 1994.

[4] K. Isler, C.A. Trugenberger. *Gauge Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. 63, 834, 1989.

[5] H. García-Compeán, Obregón, C. Ramírez, y M. Sabido *Remarks on 2+1 self-dual Chern-Simons gravity*, Phys. Rev. D 61, 085022, 2000.

[6] J. A. Nieto, O. Obregón and J. Socorro. *Gauge theory of the de Sitter group and the Ashteker formulation*, Phys. Rev. D 50, R3583(R), 1994.

[7] Edward Witten. *2 + 1 Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, Nucl. Phys. B311:46, 1988.

[8] S. W. MacDowell y F. Mansouri. *Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity*, Phys. Rev. Lett. 38, 739, 1977.

[9] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, 1992.

[10] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003.

[11] Harold Erbin. *Notes on 2d quantum gravity and Liouville theory*, tomado de `http://www.lpthe.jussieu.fr/~erbin/files/liouville_theory.pdf`, 2015.